ابن سينا



الشفاء

الفن الثاني في الرياضيات

الحساب

٢

راجعه وقدم له

الدكتور ابراهيم بيومي مدكور

تحقيق

الأستاذ عبد الحميد لطفي مظهر

منشورات مكتبة آية الله العظمى المرعشي النجفي

قم المقدسة - ايران ١٤٠٥ هـ ق

الفهرس

تصدير

أشرنا غير مرة إلى أن ابن سينا العالم لم يدرس بعد الدرس اللائق به ، وكشفت طبيعيات « الشفاء » عن عدة جوانب من دراساته الطبيعية ، ونوهنا بها فى كلمة مختصرة باللغة الفرنسية تحت عنوان (Ibn Sina Savant) . وفى رياضيات « الشفاء » جوانب أخرى جديرة بالدرس والبحث(١) .

وقد درج المسلمون فى تثقيف أبنائهم على أن يبكروا بتعليمهم الهندسة والحساب ، لأنها معارف ثابتة دقيقة ، تعين على تكوين عقل مستنير درب على الصواب ، « ويقال من أخذ نفسه بتعلم الحساب أول أمره غلب عليه الصدق »(٢) . فلم يكن غريبا أن يبدأ ابن سينا فى تعلم الحساب والهندسة وهو فى سن العاشرة ، اتجه إليهما فى ضوء ما كان يجرى من حديث حولهما بين والده وأخيه ، ووجهه أبوه إلى رجل يبيع البقل ، ويلم بحساب الهند ؛ ثم أعد له مدرسا خاصا أنزله داره ، ووكل إليـــه أمر تعليمه ، وهو أبو عبد الله الناتلى الذى كان يشتغل بالفلسفة وعلم التعاليم ، ولم يلبث التلميذ أن برز على أستاذه(٣) .

وبرغم هذا لانستطيع أن نعده بين كبار الرياضيين فى الإسلام ، وقد أشرنا إلى هذا من قبل(٤) . عرف الحساب والهندسة ، وشغل بالفلك والموسيقى ، ولكنه لم يكتب فيها شيئا يذكر فيما عدا ما ورد فى كتاب « الشفاء » . ورياضيات « النجاة » ليست فى الواقع من صنعه ، بل استخلصها تلميذه الجوزجانى من رياضيات « الشفاء » : ويبدو بوضوح أنه كان يربط الحساب بالفلسفة ، جريا على تقسيم العلوم النظرية الذى يصعد إلى

---

(١) Essays on Islamic Philosophy and Science, New York Press 1975.

(٢) ابن خلدون ، مقدمة ، بيروت ١٨٧٥ ، ص ٤٢٢ .

(٣) القفطى ، تاريخ الحكماء ، ليبزج ١٩٠٣ ، ص ٤١٣ – ٤١٤ .

(٤) Madhour, Al-Biruni et Ibn Sina, Mideo, 1975, p. 201.

أرسطو . ويصرح فى أول هذا الكتاب الذى نصدر له بأن الحساب أو علم العدد قد عولج فى كتاب « المقولات » ، كما عولج فى كتاب « الالهيات » ، وإن كان قد عول فيه بخاصة على كتاب « الأسطقسات » لأقليدس، ويعنيه منه مايستخدم فى الاستدلال وينفع فى البراهين(١) .

* * *

وقد أفاد العرب من رياضيات اليونان والهند ، أخذوا عنهما ، وترجموا قدرا من أصولهما . وعنوا بما ترجموه عناية خاصة ، فشرحوه وعلقوا عليه ، أو لخصوه واختصروه ، ووضعوا فى العلوم الرياضية مؤلفات متعددة(٢) . تدارسوها إلى جانب العلوم العقلية عامة جيلا بعد جيل . ومن الرياضيين الأول يكفى أن نشير إلى الخوارزمى (٢٢٩ هـ — ٨٤٧م) واضع علم الجبر ، الذى عرف باسمه فى القرون الوسطى المسيحية ، والكندى (٢٥٧هـ — ٨٧٣م) فيلسوف العرب ؛ وثابت بن قره (٢٨٧هـ — ٩٠١م) بين كبار المترجمين . وتلاهم رياضيون متعاقبون ، وفى القرن الرابع والخامس للهجرة أصبحنا أمام علوم رياضية عربية خالصة شغل بها ابن سينا (٤٢٨ هـ — ١٠٣٧م) ، كما اضطلع بها بعض معاصريه من كبار الرياضيين ، أمثال ابن الهيثم (٤٣٠هـ — ١٠٣٩) والبيرونى (٤٤٨هـ — ١٠٤٨ م) .

ولقد عرف العرب كيف يلائمون بين الحساب الهندى والحساب الرومى، وأدركوا الصلة بين الحساب والهندسة ، وعدوا الجبر والمقابلة فرعا منه . وألموا بأبوابه المختلفة من أعداد صحيحة وكسور عشرية ، وجذور تربيعية وتكعيبية ، وطبقوه على بعض دراساتهم الفقهية ، من علم المعاملات ، وعلم الفرائض والمواريث . والحساب عندهم ضربان : عملى ، وهو الذى يبحث فى العدد من حيث هو معدودات كالدراهم والدنانير ، وعليه يعول الناس فى معاملاتهم السوقية والمدنية . والحساب النظرى هو الذى يبحث فى الأعداد لذاتها مجردة فى الذهن ، وهو ألصق بالعلوم على اختلافها ، وهذا فيما يبدو هو ما أولع به ابن سينا .

* * *

(١) كتاب الحساب ، القاهرة ١٩٧٥ ، ص ٩ .

(٢) ابن النديم ، الفهرست ، القاهرة ١٩٣٠ ، ٣٧١ — ٣٩٠ .

ويدور كتابه الذى بين أيدينا حول أربع مقالات ، تنصب أولاها على خواص العدد زوجا كان أو فردا ، تاما كان أو ناقصا ، متحابا أو غير متحاب ، متساويا أو غير متساو ، متواليا أو غير متوال(١) . ويعالج فى الثانية أحوال العدد من حيث إضافته إلى غيره ، فيبين إضافة المساواة والمعادلة ، وإضافة الخلاف والتفاوت . ويعرض لمقايسة الأعداد بعضها ببعض ، ولنسبها المختلفة(٢) . ويقف الثالثة على أحوال العدد من حيث كيفية تأليفه من وحدانيات ، وهنا يربط الحساب بالهندسة ربطا واضحا (٣). وفى المقالة الرابعة يتحدث عن المتواليات العشر مكتفيا بها ، ومنكرا على من يصعدون بها إلى عشرين ، ويفرق بين الواسطة العددية والواسطة الهندسية(٤) .

ويختم بحثه قائلا : « قد تركنا أحوالا اعتبرنا ذكرها فى هذا الموضع خارجة عن قانون الصناعة ، وقد بقى من علم الحساب مايغنى فى الاستعمال والاستخراج ، وهو هو فى العمل مثل الجبر والمقابلة ، والجمع والتفريق الهندى وما يجرى مجراها ، والأولى فى أمثال ذلك أن تذكر فى الفروع »(٥). ويتضح من هذا أن ابن سينا يهمل ما سماه ابن خلدون (٨٠٨هـ=١١٠٦م) صناعة الحساب ، من جمع وطرح : وضرب وقسمة(٦) ، ويقف بدراسته عندما هو ألصق بالفلسفة والنظر المجرد ، وهو دون نزاع فيلسوف قبل أن يكون رياضيا . ويمثل كتابه مرحلة من مراحل التأليف فى علم الحساب ، فيه مصطلحات عدل عنها ، وأخرى قدر لها أن تبقى إلى اليوم ، وفى نشره ما يكشف عن حلقة من حلقات تاريخ العلوم الرياضية فى الإسلام .

***

وقد اضطلع بتحقيقه شيخ رياضى متخصص ، هو المرحوم الأستاذ عبد الحميد لطفى وقف عليه زمنا غير قصير ، وعول فى تحقيقه على ثلاثة

---

(١) ص ٧ – ٢٢ .
(٢) ص ٢٤ – ٣٩ .
(٣) ص ٤٣ – – ٥٢ :
(٤) ص ٥٥ – ٥٨ .
(٥) ص ٥٩
(٦) ابن خلدون ، مقدمة ، بيروت ١٨٧٩ ، ص ٤٣١ .

مخطوطات نعتد بها ، وهى نسخة بخيت (ب) ، ونسخة دار الكتب(د) ، ونسخة داماد الجديدة (سا) . وهذه النسخ الثلاث هى التى تشتمل وحدها، مما توفر لدينا من أصول «الشفاء» ، على الرياضيات . وقد لاقى محققنا عنتا كبيرا فى قراءتها واستخلاص نص مختار منها ، لأن النساخ فيما يبدو لم يكونوا على بينة مما ينسخون ، والرياضة العليا ليست فى متناول عامة القراء والنساخ . لذلك اضطر المحقق إلى أن يصحح خطأ ، وأن يتدارك نقصا ، وقد أشار إلى ذلك غير مرة .

وكم وددنا أن يمتد به الأجل حتى يشرف بنفسه على إخراج تحقيقه ، ويضيف إليه الفهارس التى درجنا عليها . ولم نشأ أن نحل أحدا محله ، آسفين بخاصة لأن المصطلح الرياضى الوارد فى هذا الكتاب لم يجمع ويفهرس ؛ مع ذكر مقابله الأجنبى . تغمد الله فقيدنا برحمته ، وجزاه عما قدم خير الجـــزاء ؟

إبراهيم مدكور

ملاحظات

للمحقق

الأستاذ عبد الحميد لطفي

صفحة ٢ : تتضمن هذه الصفحة القانونين :

ه = ١/٢ [(ه − ن) + (ه + ن)]

ه² = (ه − ن) (ه + ن) + ن²

صفحة ٣ : تتضمن القوانين :

ن ه − ه = ه (ن − ١)

(ن ه − ه − ١) = ه (ن − ١) + ١

ه² − ه = ه (ن − ١)

ه² − (ه − ١) = ه (ه − ١) + ١

ه (ه − ١) − ه = (ه − ١)² − ١

ه (ه + ١) − ه = ه²

صفحة ٤ : تتضمن القوانين :

ه³ − ه = (ه − ١) ه (ه + ١)

ه⁴ − ه = ه (ه − ١) (ه² + ه + ١)

٢ ه² + ٢ = (ه − ١)² + (ه + ١)²

(ه − ن)² + (ه + ن)² = ٢ ه² + ٢ ن²

صفحة ٥ : تتضمن :

٢ ه² + ٤ = (ه − ١) (ه − ٢) + (ه + ١) (ه + ٢)

٢ ه² + ٢ ن (ن + ١) = (ه − ن) (ه − ن −) +

(ه − ن) (ه + ن + ١)

٢ ه² + ٢ ن = (ه − ١) (ه − ن) + (ه + ١) (ه + ن)

صفحة ٨ : تتضمن :

٢ × (ن (ن − ١))/٢ + ن = ن^٢

صفحة ١٥ : تتضمن :

٢ ن − ٣ ، ٢ (٢ ن − ٣) ، ١ + ٢ + ٢ ن − ٣ = ٢ ن

صفحة ١٧ : تتضمن :

٢^(ن + ١) − ١ + ٢^ن = ٣ × ٢^ن − ١

٢^(ن + ١) − ١ − ٢^(ن − ١) = ٣ × ٢^(ن − ١) − ١

٣ × ٢^ن − ١ + ٣ × ٢^(ن − ١) − ١ = ٩ × ٢^(ن − ١) − ٢

صفحة ١٩ : تتضمن :

٢ + [٢ + ٤ (ن^٢ − ١)] = ٤ ن^٢

٦ + [٢ + ٤ (ن^٢ − ١)] = ٤ ن^٢

(٢ (٢ ن − ١) + ٢)/٤ = ن

صفحة ٢٣ : تتضمن :

٢^(ن − ١) (٢^(ن − ١)) × ٨ + ١ = (٢^(ن + ١) − ١)^٢

(٢^(ن + ١) − ١)/٤ + ١/٤ = ٢^(ن − ١)

صفحة ٥٢ : تتضمن :

٢ س ص + س^٢ + ص^٢ (س + ص)^٢

أ^٢ + أ^٢ + ١/٤ أ^٢ مربع ، أ^٢ + ٣ أ^٢ مربع ، أ^٢ − ٣/٤ أ^٢ مربع

صفحة ٥٤ : تتضمن الأعداد المضلعية التى قانونها $\text{ه} + \frac{١}{٢}(\text{ه} - ١)\,\text{ه}\,\text{ب}$

فتكون الأعداد المخمسية : $\frac{١}{٢}\text{ه}\,(٣\,\text{ه} - ١)$

وتكون » المثلثية : ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٨ ، ٣٦ ، ٤٥ ،

» » المربعة : ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ٤٩ ، ٦٤ ، ٨١ ،

» » المخمسة : ١ ، ٥ ، ١٢ ، ٢٢ ، ٣٥ ، ٥١ ، ٧٠ ، ٩٢ ، ١١٧ ،

» » المسدسة : ١ ، ٦ ، ١٥ ، ٢٨ ، ٤٥ ، ٦٦ ، ٩٢ ، ١٢٠ ، ١٥٣ ،

» » المسبعة : ١ ، ٧ ، ١٨ ، ٣٤ ، ٥٥ ، ٨١ ، ١١٢ ، ١٤٨ ، ١٨٩ ،

» » المثمنة : ١ ، ٨ ، ٢١ ، ٤٠ ، ٦٥ ، ٩٦ ، ١٣٣ ، ١٧٦ ، ٢٢٥ ،

وهكذا

صفحة ٥٧ : تتضمن $\text{ا}\,(\text{ا} + ١)\,(\text{ا} - ١) + \text{ا} = \text{ا}^{٣}$

صفحة ٦٢ وما بعدها : تتضمن المتواليات العشرة وهى :

إذا كان ا ، ب ، ح ثلاثة أعداد فإن :

١ − $\frac{\text{ح} - \text{ب}}{\text{ب} - \text{ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}}$ ، $\text{ب} = \frac{\text{ا} + \text{ح}}{٢}$ وتسمى متوالية عددية

٢ − $\frac{\text{ح} - \text{ب}}{\text{ب} - \text{ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ، $\text{ب} = \sqrt{\text{ا}\,\text{ح}}$ » » هندسية

٣ − $\frac{\text{ح} - \text{ب}}{\text{ب} - \text{ا}} = \frac{\text{ح}}{\text{ا}}$ ، $\text{ب} = \frac{٢\,\text{ا}\,\text{ح}}{\text{ا} + \text{ح}}$ » » تأليفية ونسميها توافقية

٤ − $\frac{\text{ح} - \text{ب}}{\text{ب} - \text{ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ح}}$ مثل ٣ ، ٥ ، ٦ ، $\text{ب} = \frac{\text{ا}^{٢} + \text{ح}^{٢}}{\text{ا} + \text{ح}}$ وتسمى الرابعة

٥ − $\frac{\text{ح} - \text{ب}}{\text{ب} - \text{ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ مثل ١ ، ٤ ، ٥ ، $\text{ب} = \frac{\text{ح} - \text{ا}}{٢} + \sqrt{\frac{(\text{ح} - \text{ا})^{٢}}{٤} + \text{ا}^{٢}}$ وتسمى الخامسة

٦ - $\frac{\text{حـ} - \text{ب}}{\text{ب} - \text{ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$ مثل ١ ، ٤ ، ٦ ، $\text{ب} = -\frac{\text{حـ} - \text{ا}}{٢} + \sqrt{\frac{(\text{حـ} - \text{ا})^{٢}}{٤} + \text{حـ}^{٢}}$ وتسمى السادسة

٧ - $\frac{\text{حـ} - \text{ا}}{\text{ب} - \text{ا}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ا}}$ مثل ٦ ، ٨ ، ٩ ، $\text{ب} = \frac{٢\,\text{ا}\,\text{حـ} - \text{ا}^{٢}}{\text{حـ}}$ وتسمى السابعة

٨ - $\frac{\text{حـ} - \text{ا}}{\text{حـ} - \text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ا}}$ مثل ٦ ، ٧ ، ٩ ، $\text{ب} = \frac{\text{حـ}^{٢} + \text{ا}^{٢} - \text{ا}\,\text{حـ}}{\text{حـ}}$

وتسمى الثامنة

٩ - $\frac{\text{حـ} - \text{ا}}{\text{ب} - \text{ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ مثل ٤ ، ٦ ، ٧ ، $\text{ب} = \frac{١}{٢} + \sqrt{\frac{٤\,\text{ا}\,\text{حـ} - ٣\,\text{ا}^{٢}}{٢}}$

وتسمى التاسعة

١٠- $\frac{\text{حـ} - \text{ب}}{\text{ب} - \text{ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ت}}$ مثل ٥ ، ٣ ، ٢ ، $\text{ب} = \text{حـ} - \text{ا}$

المقالة الأولى

خواص العدد

بسم الله الرحمن الرحيم

الفن الثانى

من كتاب الشفاء فى جملة الرياضيات

الأرثماطيقى

المقالة الأولى ـ خواص العدد

قصدنا أن نصل بما قدمناه من العلوم التعاليمية الفن المعروف بالأرثماطيقى وما جرت العادة بإيراده فيه وعلى الوجه الذى جرت به. على أن كتاب الاسطقسات قد أعطى أصولا كثيرة فى علم العدد، ومعول هذا الفن عند التحصيل على تلك الأصول، وقد يمكن أن ينقل كثير من الأشكال الهندسية التى تتعلق بالضرب والقسمة وبأحوال النسبة إلى العدد، فتتقرر منه أحكام هذا الكتاب، وذلك إليك :

أما ماهية العدد فقد عرفت فى كتاب قاطيغورياس منه أمراً، ولوح لك فى كتاب الاسطقسات إليه إشارة، وسيرد عليك فى العلم الأعلى منه تحقيق، وكذلك الحال من قسميه اللذين هما الزوج والفرد، وقد عرفت من كتاب الاسطقسات الأول والمركب مطلقين، والأول والمركب بالإضافة، وعرفت زوج الزوج وزوج الفرد، وزوج الزوج والفرد، وعرفت العدد التام والناقص والزائد، فليس يلزمنا لك استئناف ذكر لهذه الأمور، بل أن يتكلف لك إيراد الخواص .

---

(٧) جرت به : جمعت به (ب) .

(١٠) فتتقرر تنفرد (ب)

(١٣) من قسميه ساقطة (ب)

(١٦) لهذه الأمور : لهذه الأصول (ب) .

ولنذكر خواص العدد مطلقا ، فأولها وأشهرها أن كل عدد فإنه نصف حاشيتيه ؛ وهما عددان يليانه من جهة جانب القلة والكثرة (من بعد سواء) ، مثال ذلك الخمسة فإنها نصف ستة وأربعة ، ونصف سبعه وثلاثه، ونصف ثمانية واثنين ، ونصف واحد وتسعة ، فيكون ضعفها مساويا لحاشيتيها، ونصفها لربع حاشيتيها . وكل عدد فان مربعه مساو لمضروب حاشيته القريبتين إحداهما فى الأخرى مع زيادة واحد ، مثل مربع اثنين فإنه من ضرب ثلاثة فى واحد وزيادة واحد ، ومثل مربع ثلاثة فإنه ضرب أربعة فى اثنين وزيادة واحد ، ومثل مربع أربعة فإنه من ضرب ثلاثة وخمسة وزيادة واحد .

بل نقول إن كل عدد فإن مربعه يزيد على مسطح حاشيتيه أيهما كان فى الآخر بمربع عدد المراتب بينهما ، فإن كانت الحاشيتان القريبتان بالمرتبة هى الأولى فتزيد بمربع الواحد ، فان كانتا ثانيتين زاد بمربع الاثنين ، وان كانتا ثالثتين زاد بمربع ثلاثه ، وكل عدد فإن بعده من المراتب من ضعفه . أما إن أخذته فى أول المراتب فمثل عدده وزيادة واحد ، وأما إن أخذت أول المراتب بعده ، فبعده بما فيه من الآحاد ، مثاله أن بين أربعة وثمانية تارة أربعة خمسة ستة سبعة ثمانية ، فذلك خمسة وهو يزيد عليه بواحد ، وتارة خمسة ستة سبعة ثمانية ، وذلك مثل أعداده وما فيه من الآحاد .

كل عدد فإن بعده من ضعفه إذا لم يؤخذ هو مثل مضروبه فى واحد ، وان أخذ هو فى المراتب فمثل ذلك وزيادة واحد.

كل عدد فان بعده من ثلاثة أضعافه فهو بمقدار آحاده مضروبة فى اثنين إما بزيادة واحد أو من غير زيادة واحد على ما علمت قبل ، مثل اثنين فإن بعده من ستة هو مضروبه فى اثنين ، ثم بزيادة واحد أو غير زيادة ، وبعد ثلاثة من ثلاثة أمثاله وهو بعدد مضروبه فى اثنين ثم بزيادة وبغير زيادة ، وكذلك فإن كل عدد فإن بعده من أربعة أضعافه هو بمقدار مضروبه فى ثلاثة من العدد بزيادة أو غير زيادة ، وبالجملة فالبعد من كل موضع هو أن ينقص من مسمى الأضعاف واحد ويضرب العدد فيما بقى ثم يزاد أو لايزاد .

وكل عدد فإن بعده من مربعه بمقدار مضروبه فى العدد الذى قبله ، ثم يزاد واحد أو لايزاد ، مثل مضروب الاثنين فى واحد فهو بعده من مربعه اذا لم يزد ، ومضروب الثلاثة فى الاثنين فإنه بعد الثلاثة من مربعه إذا لم يزد، وكذلك لكل عدد فان بعده عن

(٤) فيكول ضعفها : فيكون ضعفه (سا) . ونصفها لربع : ساقطة فى (سا) .
(١٣) مثاله : مثلا فى (سا) .

مضروبه فى العدد الذى قبله هو بمربع العدد الذى قبله إذا زيد واحد ، مثاله أن بعد الثلاثة عن مضروبه فى اثنين بعدد مربع اثنين إذا زيد عليه واحد وبعد الأربعة عن مضروبه فى ثلاثة أعنى به إذا زيد عليه واحد ،

وكل عدد فإن بعده عن مضروبه فى العدد الذى بعده بعدد مربعه ،

وكل عدد فإن بعده من مكعبه بآحاد ما يبقى من مكعبه بعد نقصانه منه ، فإن بين اثنين ومكعبه ستة ، وبين ثلاثة ومكعبها أربعة وعشرون ، وبين أربعة ومكعبه ستون ، وكذلك هلم جرا ، وكذلك مع مال ماله ،

وأيضا فإن كل عدد فبينه وبين مكعبه من المراتب مضروبة فى الذى يليه ، ثم مضروب ذلك كله فى الذى قبله ، مثل اثنين فى ثلاثة ثم فى واحد ، وثلاثه فى أربعة ثم فى اثنين ، وأربعة فى خمسة ثم فى ثلاثة ، وخمسة فى ستة ثم فى أربعة .

وكل عدد فبينه وبين مال ماله مثل مضروب مربعه مجموعا إلى العدد الذى يتلو ذلك العدد ، ثم مضروبا فى مضروب ذلك العدد فى الذى قبله ، مثل ما بين مال مال اثنين وهو ستة عشر وبينه وهى أربعة عشر ، ويحدث من ضرب مربع اثنين مجموعا مع ثلاثة فى مضروب اثنين فى واحد ، وكذلك على الولاء وليقتصر على هذا ،

ولنعد إلى اعتبار خواص الأعداد المتوالية — كل عدد فإن مربعه إذا ضوعف وزيد عليه اثنان فهو مساو لمجموع مربعى حاشيتيه القريبتين ، مثاله ضعف مربع عشرة بزيادة اثنين وهو مائتان واثنان فانه مساو لمضروب تسعة فى نفسه وهو واحد وثمانون ومضروب أحد عشر فى نفسه وهو مائة واحد وعشرون وهما مائتان واثنان ؛ كل عدد فإن مربعه إذا ضوعف وزيد عليه ثمانية فإنه مساو لمربعى حاشيتيه الثانيتين ، مثاله عشرة فإن مربعه إذا فعل به ذلك كان مائتين وثمانية وهو مساو لمضروب ثمانية فى نفسه واثنى عشر فى نفسه . كل عدد فانه إذا ضوعف مربعه وزيد عليه ثمانية عشر كان مساويا لمربعى حاشيتيه التاليتين ، مثاله مائتان وثمانية عشر ، فانه مساو لمضرب سبعة فى نفسه وثلاثة عشر .

---

(٦) وكذلك : وكذلك وكل عدد فإن مربعه مساو لمضروب العدد الذى بعده فى العدد الذى قبله بزيادة واحد مثل الإثنين فان مربعه مساو لمضروب الثلاثة فى الواحد وزيادة واحد ، ومربع الثلاثة فانه مساو لمضروب الأربعة فى الاثنين وزيادة واحد (ب) و(سا) : هذا الكلام موجود فى صفحة ٢ ابتداء من سطر ٥ .

(١٧) وهى مائتان واثنان : ساقطة فى (سا) .

(٢١) مساوياً لمربعى ، مساويا مضروب (سا) .

وأما فى الحاشيتين الرابعتين فالزيادة اثنان وثلاثون وفى الحاشيتين الخامستين الزيادة خمسون

والقانون فيه أن الزيادة الأولى مضروب الزوج الأول فى أول فرد وهو الواحد، والزيادة الثانية على هذه الزيادة مضروب الزوج الأول فى الفرد الذى يتلو الواحد وهو ثلاثة، والزيادة التالية على الزيادات المجتمعة مضروب اثنين فى الفرد الثالث الواحد. وكذلك كل مربع فإن عدده إذا ضوعف وزيد عليه أربعة كان مساويا لمسطحى حاشيتين نازلتين وحاشيتين صاعدتين إذا جمعا، مثاله مائتان وأربعة فإنه مساو لمضروب تسعة فى ثمانية وأحد عشر فى أثنى عشر. وأما المسطحان اللذان يتلوان ذينك من ضرب الحاشية الثانية فى النازلة الثالثة والصاعدة الثانية فى الصاعدة الثالثة فيزيدان على ضعف ذلك باثنى عشر والذى يتلوهما يزيدان على الضعف بأربعة وعشرين واللذان يتلوانه بأربعين.

والقانون فى ذلك أن تضرب الزيادة وهى أربعة فى أول الفرد وهو واحد فيكون أربعة فيزاد ثم تضرب الزيادة فى الزوج الأول فيكون ثمانية فيزاد ثم تضرب فى العدد الذى يتلوه وهو ثلاثة فيكون اثنا عشر فيزداد ثم يضرب فى الذى يتلوه وهو أربعة فيكون ستة عشر فيزاد كل عدد فان ضعف مربعه إذا زيد عليه ستة مساو لمسطح حاشيته النازلة القريبة فى حاشية النازلة التالية ومسطح حاشيته الصاعدة القريبة فى حاشيته الصاعدة الثالثة، مثاله مائتان وستة فإنه مساو لمضروب تسعة فى سبعة وأحد عشر فى ثلاثة عشر، فان ضربت القريبة فى كل جهتيه فى الرابعة كانت الزيادة ثمانية ولا تزال الزيادات تتفاوت باثنين اثنين كل عدد فإن ضعف مربعه إذا زيد عليه ستة عشر كان مساويا لمسطح الحاشية الثانية النازلة فى الرابعة النازلة، والثانية الصاعدة فى الرابعة الصاعدة، ومثاله مجموع مسطحى ثمانية فى ستة واثنى عشر فى أربعة عشر فذلك مائتان وستة عشر، فإن ضربت الثانيتان فى الخامستين كانت الزيادة عشرين، فإن ضربتها فى السادستين كانت الزيادة أربعة وعشرين، وكذلك يستمر بتفاوت أربعة. فإن كانت الحاشيتان الثالثتان ضربا أولا فى الخامستين كانت الزيادة ثلاثين فإن ضربتهما فى السادستين كانت الزيادة ستة وثلاثين، فإن ضربتهما فى السابعتين كانت الزيادة اثنين وأربعين، فلا تزال الزيادات تستمر ستة ستة، وعلى هذا القانون فيما وراء ذلك من الحواشى.

(١) إثنان وثلاثون : إثنان وعشرون (سا) : وهى خطأ.
(٢١) كانت الزيادة عشرين : كانت الزيادة عشرين عشرين (سا).
(٢٢) السادستين (ب) : فى السادس (سا).
(٢٤) كانت الزيادة ستة وثلاثين نان ضربتهما فى السابعتين : ساقطة فى (سا).

ونبدأ لك بخواص الأعداد المتوالية توالبها الطبيعى، فنقول إن مراتبها لا تخلو إما أن تكون فردا وإما أن تكون زوجا، فإن كان فردا وجد لها واسطة لامحالة، وهذه الواسطة تكون دائما نصف الحاشيتين مجموعتين. وأعنى بالحاشيتين عددين أو عددا ووحدة بعدهما فى الترتيب بعد الواسطة وسواء أحدهما من جانب النقصان والأخرى من جانب الزيادة، مثل التسعة والواحد فهما حاشيتا الخمسة والخمسة نصف مجموعهما، وهى أيضا نصف الثمانية والاثنين وإنهما أيضا حاشيتان، ونصف السبعة والثلاثة والستة والأربعة كذلك، وأقرب حاشيتيهما الستة والأربعة وأبعدهما التسعة والواحد. وكل عدد هو واسطة فهو نصفهما وإن كانت المراتب زوجا حتى كان بدل الواسطة الواحدة واسطتان كانت الواسطتان مجموعتين مثل أى حاشيتين جمعتا، مثل الأربعة والخمسة من الواحد إلى الثمانية، فإنهما مجموعان متساويان للواحد والثمانية، وللاثنين والسبعة، والثلاثة والستة، ويلزم فى جميع هذا أن تكون كل حاشيتى عدد مساويتين للأخريين نظيرتيهما:

ومن الخواص المتعلقة بجميع ذوات المراتب أنا إذا زدنا على مبلغ العدد الأخير المبتدىء من الواحد واحدا وضربناه فى نصف عدد المراتب كان الحاصل مساويا لجملة الجميع، مثاله لتكن آخر المراتب أربعة فإنك إذا زدت على الأربعة واحدا فكان خمسة فضربته فى نصف عدد المراتب الذى هو أربعة ونصفه اثنان بلغ عشرة وهو مجموع مابين الواحد والأربعة، فإن أردت من الواحد إلى الخمسة زدت على الخمسة واحدا فصار ستة فضربته فى نصف عدد المراتب وهو اثنان ونصف فبلغ خمسة عشر، وأيضا فإن مجموع كل طرفى ترتيب كان من الواحد أو من غيره إذا ضرب فى نصف المراتب أو ضرب نصفه فى جميع المراتب كان ما يجتمع مثل جملة مجموع تلك المراتب، فليكن أول المراتب اثنين وآخرها ستة ويجمعهما فيكون ثمانية فتضربه فى نصف عدد المراتب وهو اثنان ونصف فيكون عشرين أو تضرب نصفه فى تمام عدد المراتب فتكون أربعة فى خمسة وذلك عشرون، وهو مساو لمجموع اثنين، ثلاثة، أربعة، خمسة، ستة.

---

(١) ونبدأ: ساقطة فى (ب).

(٣) أو عدد ووحدة: ساقطة فى (ب).

(١٦) الواحد والأربعة: الواحد إلى الأربعة (ب).

(١٧) فضربته: فضرب (ب).

(٢١) فيكون عشرون: وهو عشرون (سا).

ومن الخواص المتعلقة بالجمع أن كل أعداد متتالية ليست تتالى الزيادات بالآحاد بل بالاثنوات والثلاثيات أو غير ذلك بعد أن يستمر على سنن واحد ، وليكن ابتداؤها من حيث كان فإن مضروب عدد المراتب منقوصا منه واحد فى العدد الذى يقع به التفاضل كالاثنوة والثلاثية أو غير ذلك مما تتفاضل به المراتب مزيدا عليه العــدد المبتدأ منه مساويا للعدد الأخير ، فإن زيد مرة أخرى وضرب فى عدد المراتب كما هو كان مثل ضعف جملة مجموع الأعداد ، ومثاله لو قال لك قائل خمسة أعــداد متتالية تبتدىء من الأربعة وبين كل عددين ثلاثة حتى يكون التفاضل بأربعة أربعة ، ما آخرها وكم مجموعها ؟ فإذا نقصت واحــدا من الخمسة حتى حصل لك أربعة ، فضربته فى عدد التفاضل وهو أربعة كان ستة عشر ، فإذا زدت عليها أولها كان عشرين ، فقد خرج لك العدد الأخير . لأن مراتب الأعداد تكون أربعة ثم ثمانية ثم اثنى عشر ثم ستة عشر ثم عشرين ، فإذا زدت على عشرين أربعة أيضا كان أربعة وعشرين ، فإن شئت اضربه فى خمسة فيكون مائة وعشرين فخذ نصفه فهو مجموع المراتب ، وإن شئت اضرب نصفه فى المراتب أو جميعه فى نصف المراتب ، وكيفما يعمل فهو جواب المسألة .

ومن الخواص المتعلقة بالجمع أن كل أعداد متتالية تبتدئ من الواحد ، إذا جمعت مبتدأة من الواحد إلى آخرها ، ثم مرجوعا من آخرها إلى الواحد ، مثل واحد ، اثنين ، ثلاثة ، أربعة ، ثلاثة ، اثنين ، واحد فمجموعها مساو لمربع العدد الأخير فان مجموع ما مثلنا به ستة عشر . وتحصيل هذا أن ضعف مجموع الأعداد التى دون المرتبة الأخيرة مع الذى فى المرتبة الأخيرة مساو لمربع العدد الأخير .

ومن الخواص المتعلقة بالجمع أنك إذا جمعت أعدادا متوالية من الواحد ، فالمجموع الأول مثل ونصف العدد الأخير ، والمجموع الثانى ضعف العدد الأخير ، والمجموع الثالث ضعف ونصف العدد الأخير ، والمجموع الرابع ثلاثة أضعاف العدد الأخير ، والمجموع الخامس ثلاثة أضعاف ونصف العدد الأخير ، وكذلك إلى غير نهاية . مثاله واحد ، اثنان ، فإنه مثل ونصف الاثنين وواحد ، اثنان ، ثلاثة ، فإنه ضعف ثلاثة ، وواحد ، اثنان ثلاثة ، أربعة ، فإنه ضعف ونصف الأربعة ، وواحد ، اثنان ، ثلاثة ، أربعة ، خمسة . فإنه ثلاثة أضعاف خمسة ، وواحد ، اثنان ، ثلاثة ، أربعة ، خمسة ، سته ، فإنه ثلاثة أضعاف ونصف سته .

---

(١١) ثم عشرين : ساقطة من (د) .

(١٦) العدد الأخير : العدد ساقطة (سا) ، (ب) .

وأيضا فان كل أعداد متوالية نجمعها بهذا الجمع ، فإن المجموع الأول يكون مثل العدد الذى يتلوه والمجموع الثانى مثل ونصف للعدد الذى يتلوه والمجموع الثالث ضعف العدد الذى يتلوه ، وكذلك إلى غير النهاية مثاله أن الواحد والاثنين مثل ثلاثة ، والواحد والاثنان والثلاثة مثل ونصف أربعة ، فإن زدت أربعة كان ضعف خمسة . وإن زدت خمسة كان ضعف ونصف ستة :

ومن الخواص المتعلقة بالجمع أنك إذا جمعت أفرادا متوالية مبتدأة من الواحد وجمعت بعدها أزواجا متتالية من الاثنين بعددها ، فإن المجموع الأول من الأزواج يكون مثل ونصف المجموع الأول من الأفراد ، والمجموع الثانى مثل وثلثه ، والمجموع الثالث مثل وربعه ، ويكون كل مجموع زائدا ، وسمى عدد مراتبه ، ويكون عدده عدد مراتبه ، مثاله الاثنان والأربعة تزيد على الواحد ، والثلاثة نصفه فإن زدت هناك ستة وها هنا خمسة ، يصير مثل وثلث هذا :

ولنعد الآن إلى إيراد خواص أول قسمى العدد من حيث كيفية انقسامه إلى متساويين وغير متساويين ، وهو الزوج والفرد : ولنورد ما نصرح به من كتاب الاسطقسات ، وقد تجرى بينهما مشاركة مستفادة من جنسهما ، وذلك فيما تتتالى من الأفراد والأزواج تتاليا طبيعيا إلى أنواع العدد ، وذلك كله أن تكون المراتب متفاضلة بتفاضل واحد ، أما تفاضل التتالى الطبيعى لأنواع العدد فبالواحد ، وأما تفاضل الأفراد والأزواج المتتالية بالطبع فباثنين اثنين إذا كان كل فرد إذا زيد عليه واحد صار زوجاً ، ثم إذا زيد عليه واحد آخر صار فردا ، ثم إذا زيد عليه واحد آخر صار زوجا ، فيكون بين الفرد والفرد الذى يليه اثنان ، وبين الزوج والزوج الذى يليه اثنان ، فيجب أن يكون كل وسط فى مراتب الأفراد التى على الولاء الطبيعى ، ومراتب الأزواج الذى على ذلك الولاء مثل نصف مجموع أى حاشيتين كانتا لأنهما حاشيتا تلك الواسطة بعينها فى النظام الطبيعى للعدد ، وكل واسطتين مجموعتين مثل كل حاشيتين مجموعتين ، لأن تلك الواسطتين تكونان حاشيتين للعدد الواقع فى النظام للعددين بينهما ، فيجب أن يساوى مجموعهما مجموع تلك الحاشيتين الأخريين على ماسلف بيانه ، وليست هذه الحال جارية بين الأفراد المتتالية والأزواج المتتالية فقط ، بل بين

(٤،٥) وإن زدت خمسة كان ضعف ونصف ستة .

(٦) ومن الخواص المتعلقة بالجمع أنك إذا جمعت : ساقطة فى (د) .

(٩) الثالث : الرابع (ب) .

(١١) وها هنا خمسة يصير مثل وثلث هذا : ساقطة فى (د) .

كل أعداد فيهما تفاضل بمتساو ، فلذلك توجد بهذه الخاصية أيضاً فى نظام مراتب أزواج الفرد فهذه مشاركة وجب أن نعدها قبل الخوض فيها .

فلنتجرد الآن لذكر الخواص ولنبدأ بخواص الفرد فنقول إنها الخواص المعلومة المذكورة من أنها لاتتركب عن أزواج ألبتة ولا عن أفراد بعدد زوج ،ولايوحد فيها من جنسها عدد يعنى مابعده من جنسها ولايوجدفيها من جنس مقابلها عدد يعنى مابعده من جنسها وماجرى مجرى هذه الخواص . فلنقتصر على ماقيل فى كتاب الاسطقسات ، ولنذكر من خواصها خواص تتعلق بنظام متتالياتها على الولاء ، فمن خواصها أن مجموعها من الواحد على الولاء يكون مربعا أبداً ، مثل الواحد والثلاثة ، ثم الواحد والثلاثة والخمسة ، ثم الواحد والثلاثة والخمسة والسبعة ، ثم الواحد والثلاثة والخمسة والسبعة والتسعة . ومن خواصها أن كل مربع من هـــذه فضلعه عدد المراتب ، مثل الأربعة فهو مجموع مرتبتين فجذرها اثنان ، والتسعة فهو محموع ثلاث مراتب ، فجذرها ثلاث . ومن خواصها أنك إذا أردت أن تعرف مبلغ عدد يقع فى مرتبة معلومة من الواحد مثلا كالعاشرة والحادية عشر وغير ذلك ،فاضرب عدد المرتبة ولتكن العاشرة ، وعددها عشرة فى اثنين فيكون عشرين، فانقص منه واحداً فيكون تسعة عشر فهو عدد المرتبة العاشرة .

وأما حال الواسطة والواسطتين مع الحاشيتين فهو على ماعلمت ، ومن خواصه أن كل واحد من الآحاد يرجع فيه سادسه ، مثاله أن الواحد يرجع فى السادس وهو الحادى عشر ، ثم بعد السادس وهو الواحد والعشرون ، والثلاثة يرجع فى السادس وهو الثالث عشر وكذلك إلى غير نهاية .

ومن خواصه أن كل فرد أول إذا تخطى على عدته انتهى إلى مركب ، مثل الثلاثة فإن الثالث منه وهو تسعة مركب ،والخمسة فإن الخامس منه و هوخمسة عشر مركب . وخاصة أخرى أن أول الأعداد الغير المركبة و هو ثلاثة يؤدى بالتخطى الأول إلى مجذور ثم لايؤدى إلى غير نهاية ،والثانى وهوالخمسة يؤدى بالتخطى الثانى إلى مجذور عند خمسة

---

(٥) جنس : ساقطة (د) .

(٩) ثم الواحد والثلاثة والخمسة والسبعة ثم الواحد والثلاثة والخمسة والسبعة والتسعة : ساقطة من (ب) ويوجد بدلها ثم السبعة والتسعة .

(١٦) على ما علمت . على ما عملت وما سلف (سا) .

(١٨) وهو الحادى عشر ثم بعد السادس وهو الواحد والعشرون ، والثلاثة يرجع فى السادس : ساقطة فى (سا) — وكذلك : وكذلك إلى غير نهاية (ب) .

وعشرين ثم لا يؤدى ، وكذلك إلى غير نهاية . وخاصية أخرى أن الرابع بعد المجذور الأول وهو الواحد مجذور وهو التسعة ، والثامن بعد المجذور الثانى ، والثانى عشر بعد المجذور الثالث ، والسادس عشر بعد المجذور الرابع بزيادة أربعة أربعة ، وكل بيت ومرتبته يقع فيه مجذور فيكون مبلغ ذلك المجذور مساويا لضعف عدد البيت والمرتبته مزيداً عليه واحد فإن العدد المربع الأول هو تسعة وهو فى المرتبة الرابعة من الأعداد الأفراد وضعف الأربعة ثمانية مزيداً عليه واحد ، البيت الثانى عشر من الثلاثة تقع فيه خمس وعشرون وهو مساو لضعف اثنى عشر مزيداً عليه واحد فإذا بنينا من الأفراد المتتالية بالطبع جدولا مربعا ظهرت هناك خواص من حيث التشكيل وكذلك إذا بنينا جدولا مثلثا ، فلنبدأ بالمربع ولنجعله خمسة

١	٣	٥	٧	٩
١١	١٣	١٥	١٧	١٩
٢١	٢٣	٢٥	٢٧	٢٩
٣١	٣٣	٣٥	٣٧	٣٩
٤١	٤٣	٤٥	٤٧	٤٩

فنقول إن كل صليب منه كان قطر الشكل أو لم يكن ، كان مجموعا القطرين متساوبين أما الذى على القطر فإن مجموع كل واحد من القطرين من هذا الشكل مائة وخمس وعشرون ، وأما الذى ليس على القطر فمثل الصليب الذى من سطرين أحدهما ثلاثة ، خمسة عشر ، سبعة وعشرون ، والثانى سبعة خمسة عشر ثلاثة وعشرين ، فإن كل واحد من قطر خمسة وأربعين ، ونجد مجموع طرفى سطر كل صليب مساويا لمجموع طرف السطر الأخير ، ونجد مجموع بيوت كل مربع من هذه الأعداد على توالبها يساوى مربع مربع عدد بيوت الضلع . فإنك إن بنيت مربعا ضلعه اثنان فكان إعداده واحد ثلاثة خمسة سبعة هكذا كان جميع ذلك ستة عشر وهو مربع مربع اثنين ،

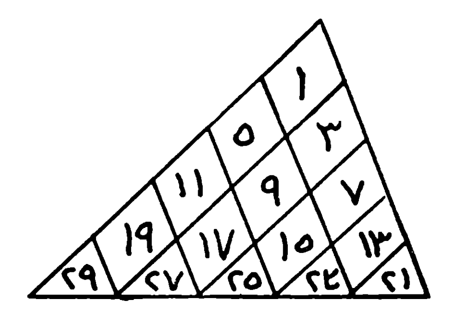
١	٣
٥	٧

فإن كان ضلعه من ثلاثة بيوت حتى كانت أعداده واحدا ، ثلاثة ، خمسة ، سبعة ، تسعة ، أحد عشر ، ثلاثة عشر ، خمسة عشر ، سبعة عشر ، هكذا .

٥	٣	١
١١	٩	٧
١٧	١٥	١٣

فمبلغ جميع ذلك واحد وثمانون وهو مربع مربع الثلاثة ، ونجد القطر فى جميع ذلك يساوى مكعب ذلك العدد ، ومثاله فى الجدول الأكبر فإن بيوته خمسة وقطره مائة وخمسة وعشرون ، وفى الثانى قطره ثمانية ، وفى الثلاثى قطره سبعة وعشرون .

وكذلك فإن بنيت منها شكلا مثلثا على هذه الصورة وجدت جميع الأعداد والتى تنزل من الواحد إلى مسقط العمود مربعات مائة على الولاء وجدت مجموع مافى صف



واحد عرضا عددا مكعبا مثل مجموع ثلاثة وخمسة ومجموع سبعة وتسعة وأحد عشر .

وأما العدد الزوج فقد عرفت فى كتاب الاسطقسات منه ماعرفت ، ونشير لك إلى خواص يلزم مراتبها منها أنك تجد مجموع مراتبها مساويا لمربع عددها مركبا إليه ضلعه ، مثل أنك إذا ابتدأت من الاثنين وأضفت إليه الأربعة كانت ستة ، وهو مثل مربع عدد المراتب ، ومثل أنك إذا ابتدأت من الاثنين فأضفت إليه الأربعة والستة كان اثنى عشر ، وهو مثل مربع الثلاثة ومثل ضلعه .

ومن خواصها أن كل زوج يزيد على الأول من الأفراد بواحد ، فإن ذلك الزوج مساو لمجموع أجزاء مربع ذلك الأول ، مثل الأربعة فإنها تزيد على الفرد الأول وهو

(١) ضلعيه من ثلاثة بيوت ساقطة فى (سا) ، (ب) .

الثلاثة بواحد ، ومربع الثلاثة تسعة ، ولهما من الأجزاء جزآن تسع وثلث ، ومجموعهما مساو للأربعة ، وأيضا الستة تزيد على الفرد الأول بواحد وذلك الفرد الأول خمسة ، ومربع الفرد الأول خمسة وعشرون ، وله من الأجزاء خمس وخُمس خمس لاغير ومبلغه ستة ، فإن كان الزوج بحيث إذا نقص منه ثلاثة بقى فرد أول ، فإن ذلك الزوج مركب من أجزاء ضعف ذلك الفرد مثل الثمانية فإنها إذا نقص منها ثلاثة بقى خمسة وضعفها عشرة ولها نصف وخمس وعشر ، مجموع ذلك ثمانية ، أعنى مجموع الخمسة والاثنين والواحد.

فلنتكلم الآن فى خواص أنواع الزوج وأنواع الفرد . ولنبدأ بخواص أنواع الزوج فإن تنويعها أقرب إلى أن يكون تنويعا فصل من تنويع أنواع الفرد . ولنبدأ بخواص زوج الزوج فهو أبسط ، وقد علمت كيفية إنشائه على سبيل التضعيف وخواص أخرى مما هى له فى كتاب الاسطقسات : فمن خواص زوج الزوج ما هو فرع خواص ذكرت فى الاسطقسات , أنه لاجزء له سمى العدد الفرد أو زوج غير زوج الزوج ولازوج زوج أقل منه إلا وهو بعده ، وكل زوج زوج فمربعه زوج الزوج ، وإذا نقص منه الزوج الأول وهو اثنان خرج زوج الفرد كالثمانية تنقص منه الإثنان فيخرج زوج الفرد وهو ستة ، وكل زوج زوج فهو ناقص ونقصانه بواحد .

ومن خواص زوج الزوج أن مراتبه تتتالى على نسبة متشابهة هندسية إذا كانت تتوالى على التضعيف ، فلا تكون تفاضلها بمتساو بل يكون كل فضل مساويا للمفضول عليه ، ويكون الفضول متفاضلا فيما بينها ذلك التفاضل بعينه . ويلزم من وقوع مراتبها على النسبة الواحدة أن تكون متناسبة إذا قطعت ومتناسبة إذا ردت إلى المساواة . فيلزم أن يكون مضروب أى واسطة أخذت فى نفسها كمضروب إحدى الحاشيتين فى الأخرى ، إذ نسبة الحاشية الصغرى إلى الواسطة تكون كنسبة الواسطة إلى الحاشية الأخرى ، ويلزم أن يكون مضروب إحدى الواسطتين فى الأخرى كمضروب إحدى الحاشيتين فى الأخرى ، لأن نسبة الحاشية الصغرى إلى الواسطة الصغرى كنسبة الواسطة الكبرى إلى الحاشية الكبرى . ولتكن المراتب : اثنان أربعة ثمانية ستة عشر اثنين وثلاثين أربعة وستين ، فتجد أربعة فى نفسها كاثنين فى ثمانية ، وثمانية فى نفسها كاثنين فى اثنين وثلاثين ، وأربعة فى ستة عشر ، ونجد أربعة فى ثمانية كاثنين فى سته عشر ، وثمانية فى ستة عشر كأربعة فى اثنين وثلاثين واثنين فى أربعة وستين .

ولما كانت أعداد زوج الزوج منتظمة على نسبة متصلة وجب أن يكون للمربعات والمكعبات منها نظام فى أن المربع يكون ثالثه مربعا والمكعب رابعه مكعب وتستمر كذلك .ومن خواصها أن الأعداد التامة تنشأ منها .

أما الأعداد المتحابة فهى الأعداد التى يتركب كل واحد من أجزاء صاحبه كما يتركب صاحبه من أجزائه ، مثل مائتين وعشرين مع مائتين وأربعة وثمانين فإن للمائتين والأربعة والثمانين من الأجزاء النصف وهو ١٤٢ ، والربع وهو ٧١ ، وله جزء من واحد وسبعين وهو ٤ ، وله جزء من مائة واثنى وأربعين وهو ٢ ، وله جزء من مائتين وأربعة وثمانين ، وهو ١ . وإذا جمعت هذه الأجزاء تكون مائتين وعشرين . أما أجزاء مائتين وعشرين فله النصف وهو ١١٠ ، وله الربع وهو ٥٥ ، وله الخمس ٤٤ ، وله العشر ٢٢ ، وله جزء من أحد عشر وهو ٢٠ ، وله جزء من عشرين وهو ١١ ، وله جزء من اثنين وعشرين وهو ١٠ ، وله جزء من أربعة واربعين وهو خمسة ، وله جزء من خمسة وخمسين وهو ٤ ، وله جزء من مائة وعشرة وهو ٢ ، وله جزء من مائتين وعشرين وهو ١ ، وإذا جمعت هذه الاجزاء تكون مائتين وأربعة وثمانين ، وليس الواحد منها من الأجزاء غير ما ذكرنا .

وإذا جمعت أعداد زوج الزوج والواحد معهما فاجتمع عدد أول بشرط أن يكون إذا زيد عليهما آخرها ونقص الذى قبله كان المبلغ بعد الزيادة والمبلغ بعد النقصان أوليا فضرب المبلغ المزيد عليه فى المبلغ المنقوص ثم ضرب ما اجتمع فى آخر المجموعات حصل عدد له حبيب ، وحبيبه العدد الذى يكون من زيادة مجموع الزائد والناقص المذكورين ضربا فى آخر المجموعات على العــدد الموجود أولا الذى له حبيب وهما متحابان .

وأما خواص زوج الفرد فقد عرفنا فى كتاب الاسطقسات ماعرفنا ، ولاح فى جملتها أنه لابعدها زوج إلا بفرد ولافرد إلابزوج ، وجزء الزوج سمى الفرد كالاثنين ثلث الستة ، وجزء الفرد سمى الزوج كالثلاثة نصف الستة ، وإن زيادة الزوج الأول وهو الاثنان عليه يخرج زوج الزوج فعلم أن أنشأه من ضرب الأفراد المتوالية فى اثنين ، فيعلم من ذلك أن الواقع بين مرتبة وبين التى تليها ضعف الواقع كان فى الأفراد والطبيعية فيكون تفاضل مراتبها بأربعة أربعة وإنه لامجذور فيها ولا مكعب فإن كل مجذور مكعب إما فرد يعد بفرد بعدد فرد وإما زوج يعد بزوج بعدد زوج ، وقد عرفت

---

(٤) المتحابة فهى الأعداد : ساقطة فى (ب) .

هكذا ، ولما كان التفاضل بأربعة أربعة ويبدأ إما من الاثنين وإما من الستة على ما نشرح الحال مثه ، والاثنان إذا زيد عليه أربعة كان ستة وإذا ، زيد على ستة أربعة كان عشرة ،وإذا زيد عليه أربعة كان أربعة عشر ، وإذا زيد عليه أربعة كان ثمانية عشر ،وإذا زيد عليه أربعة كان اثنين وعشرين ، فعاد إلى الإثنين عودا بدور ، ووجب أن يكون مدار آحاده على هذا النظام : اثنان ، ستة ، عشرة ، أربعة عشر ، ثمانية عشر ، إثنان وعشرون ، ولا يوجد فيها من الآحاد غير ذلك ، ووجب أن يكون كل سادس يشبه الأول فى آحاده أو صفره ، وإذا جعلت إبتداء المراتب من الستة وللستة ثلث صحيح هو اثنان ، فإذا ابتدأت بعد الستة وجب للثالث بعدها وهو ثمانية عشر ثلث صحيح ، وللثالث بعد الثمانية عشر وهو الثلاثون ثلث صحيح وكذلك إلى غير نهاية ، وبعد الستة العشرة وجزؤه سمى الفرد الذى بعد الثلاثة وهو الخمسة فإن للعشرة خمسا صحيحا ، فإذا إبتدأت بعد العشرة فتجد المشتق له الاسم من ذلك العدد وهو الخامس له خمس صحيح ، وكذلك إلى حيث أردت ، والعدد الذى بعد العشرة وهو الأربعة عشر وجزؤه سمى الفرد الذى يلى الخمسة وهو السبعة فله سبع ويوجد السابع إذا ابتدأ بعده كذلك .

ومن خواص هذه المراتب أن جمع الاثنين ، وهو أول زوج فرد مع كل مرتبة يكون سميها عددا مربعا ، يخرج عددا مربعا مثل جمعها مع الرابع منها وهو أربعة عشر ومع التاسع منها وهو أربعة وثلاثون الذى يلى الاثنين وهو الستة وهو زوج الفرد الثانى إذا جمع مع عدد كل مرتبة مبتدأة من الواحد فيشتق لها اسم من عدد مربع كان المجموع مربعا مثل الستة مع الرابع وهو العشرة ومع التاسع وهو الثلاثون . ومن ذلك أن مضروب سمى كل مرتبة فى أربعة إذا ألقى منه العدد الأول كان عدد تلك المرتبة ، مثاله أن البيت الرابع سميه أربعة فإذا ضرب فى أربعة كان ستة عشر سقط منه الأول وهو الإثنان فيكون أربعة عشر ويمكنك أن تعكس هذا وتقول إن كل عدد منها إذا زيد عليه اثنان وقسم على أربعة فما خرج فهو عدد مرتبته من الأول .

ومن ذلك أن ضعف مضروب عدد المراتب فى نفسها مساو لمجموع أعدادها ، وليكن أربعة ، وضعف مضروبها فى نفسها اثنان وثلاثون فذلك مجموع ٢ ، ٦ ، ١٠ ، ١٤ ، ومن ذلك أن مجموع الأول والثانى مكعب ثم لا مكعب فى مجموعها إلا ما يوازى مكعب ثمانية ، وأنت تعرفه وتعرف مرتبته بما علمت ثم مكعب مكعبه وهكذا ،

ننشىء من أزواج الفرد المتتالية مربعا ستة فى ستة ومن خواص هذا الجدول المربع أن آحاد أول كل سطر فى العرض كآحاد آخره ، وإن كان فى أحدهما صفر ففى الآخر صفر ، ومنها أن مجموع طرفى كل قطر مساو لمجموع طرفى القطر الآخر مثل اثنين مع مائة واثنين وأربعين وهما طرفا قطر

٢	٦	١٠	١٤	١٨	٢٢
٢٦	٣٠	٢٤	٢٨	٤٢	٤٦
٥٠	٥٤	٥٨	٦٢	٦٦	٧٠
٧٤	٧٨	٨٢	٨٦	٩٠	٩٤
٩٨	١٠٢	١٠٦	١١٠	١١٤	١١٨
١٢٢	١٢٦	١٣٠	١٣٤	١٣٨	١٤٢

واثنين وعشرين مع مائة واثنين وعشرين وهما طرفا القطر الآخر ؛ ومنها أن مجموع طرفى القطر مجذوران ، ومنها أن كل عددين بعدهما من طرفى القطر بعد واحد فمجموعهما مساو مجموع طرفى القطر فهو كذلك مجذور أيضا . ومن ذلك أن زيادة كل سطر على أول ذلك بالسطر واحدة فإن زيادة السبعين على ستة وأربعين كزيادة أربعة وتسعين على اثنين وعشرين .

وأما أحوال زوج الزوج والفرد فلنتكلم فيها فنقول إنه نسبة زوج الزوج والفرد فى أنه لا يقبل التنصيف المستمر إلى الواحد من غير كسر ونسبة زوج فى أنه لاينتصف أول نصفه . إلى فردين ، ولا يقف تنصيفه على نسبة واحدة . وأما إنشاؤه فمن ضرب أزواج الزوج ومبدئه من الأربعة فى الأفراد المتتالية ، وكلما كان الزوج أكبر كان قبوله للتنصيف أكثر .

وقد يكون منه الزائد والناقص والتام فإن الثمانية والستين عدد ناقص وهو من جملته ، وأما التام فالثمانية والعشرون ، والزائد منه كثير مثل الاثنا عشر ، وقد يقع فيه المربعات أيضا . وإنشاء تلك المربعات التى تقع فيه أعدادها أن يضرب الأول حتى

(١٦) زوج الزوج والفرد : موجودة فى (د) زوج الفرد .

فى الفرد الأول حتى يكون ستة فهو جذر لأول مربع ، ثم نضربه فى الفرد الثانى حتى تكون عشرة فهو جذر المربع الثانى ، وكذلك إذا نقصت البيت من الذى يليه خرج زوج الزوج مثل الاثنا عشر من العشرين ، وذلك فيما نشوه من ضرب الأربعة فى الأفراد ، ومثل الأربعة والعشرين من الأربعين ، وذلك فيما نشوه من ضرب الثمانية فى الأفراد ، وهذا ما نقوله فى خواص أنواع الزوج .

ولننتقل إلى خواص أنواع الفرد، وقد بقى علينا الكلام فى أول الأعداد وهو الاثنان هل هو زوج الزوج أو زوج الفرد فقد ظن من جهة أنه لا ينتهى التنصيف إلى زوج أنه زوح الفرد ، وجوز بعضهم أن يكون زوح الزوج وزوج الفرد معا وأن يكون مبدأ لكليهما ، والذى عندى أن زوج الزوج بالحقيقة هو العدد المنقسم الى الزوج عند التنصيف ، وزوج الفرد بالحقيقة هو المنقسم إلى الفرد عند التنصيف . فزوج الزوج هو الذى نصفه زوج ، وكل نصفه ينصفه غير الواحد زوج ولابد من تنصيف زوج الزوج : وزوج الفرد وهو الذى نصفه فرد لا ينتصف ، والفرد يكون عددا أو يكون وحدة من حيث لا ينقسم بمتساويين ، والزوج لا يكون إلا عددا : وبعد ذلك فيجب الايشاح فى التسمية فإن أحب أحد أن يجعل الاثنين مستحقا للاسمين جميعا فيجب أن يجعل حد زوج الزوج أنه الذى لاينتصف إلى عدد فرد وكذلك الاثنان ، ويجعل زوج الفرد هو الذى ينتصف الى الفرد وكذلك الاثنان لكن القسمة لا تكون متعادلة فإن أحب أن يخرج الاثنين عن الاسمين جميعا فيجب أن يجعل حد زوج الفرد أنه المنتصف الى عدد فرد ، وحد زوج الزوج أنه المنتصف إلى عدد زوج فلم يكن الاثنان مستحقا لأحد الاسمين مع تعادل القسمة .

فلنتكلم الآن فى أحوال أنواع الفرد ، والفرد منه أول ومنه مركب ، والمركب قد يكون أولا بالقياس إلى غيره ، وقد عرفت جميع هذا . وإذا أردت أن تستخرج مراتب المركبات فى أنفسها فارجع إلى جداول الأفراد المتوالية فتجد كل ثالث بعد الثلاثة مركبا وكذلك إلى غير النهاية ، مثال الأول التسعة والخمسة عشر والواحد والعشرون ، مثال الثانى الخمسة عشر والخمسة والعشرون والخمسة والثلاثون وكذلك ، وقس له من السبعة والتسعة على ذلك ، وتجد هناك شيئا آخر وهو

---

(٣) الإثنا عشر من العشرين : الستة عشر (سا) وهو خطأ .

(٦) خواص : ساقطة فى (سا) .

(٢٣) فى أنفسها : غير موجودة فى (ب) .

أن الثلاثة منها بعد أول مركب فى ترتيبها بأول الأفراد وهو بنفسها كالتسعة ، والثانى بالفرد الذى يليها كالخمسة ، والثالث بالفرد الثالث كالسبعة ، والخمسة أيضا بعد الذى يليها بأول الأفراد وهو الثلاثة مثل خمسة عشر ، والثانى بنفسها كالخمسة والعشرين ، والثالث بما بعدها مثل الخمسة والثلاثين فإنها بعدها مثل الخمسة والثلاثين فإنها بعدّها بالسبعة ، وأما المركب فى نفسه والأول عند غيره فمثل كل مربع أول بالقياس إلى مربع أول من هذه الأفراد المتتالية .

فهذا ما نقوله فى أحوال الزوج والفرد . وللعدد قسمة أخرى ، فمنه زائد ومنه ناقص ومنه تام وقد عرفت جميع ذلك وعرفت كيفية إنشاء العدد التام من أزواج الزوج . فاعلم أن العدد التام لايكون إلا زوجا لأنه إنما ينشأ من ضرب عدد فرد فى زوج ، واتفق أن الواقع منه فى الآحاد واحد وهو الستة ، وفى العشرات واحد وهو الثمانية والعشرون ، وفى المئات واحد وهو أربعمائة وستة وتسعون ، وفى الألوف واحد وهو ثمانية آلاف ومائة وثمانية وعشرون ، وكذلك فى كل صنف واحد لا ينفك عن آحاد وهى ستة أو ثمانية وإن لم يلزم عند التجربة فيها التعاقب .

ومن خواص العدد التام أنه إذا ضرب فى ثمانية زيد عليه واحد كان مجذورا ، وإذا قسم جذره على أربعة وزيد على ما سيجتمع ربع كان زوج للزوج الذى ضرب فى ضعفه إلا واحدا حتى خرج ذلك العدد التام مثل الستة فى الثمانية مزيدا عليه واحد ، وجذره سبعة ، وربعه واحد وثلاثة أرباع ، فإذا زيد عليه ربع صار اثنين وهو زوج الزوج ، وهو الذى وقع الضرب فى ضعفه إلا واحد حتى خرج ستة .

وأما العدد الزائد والناقص فقد يكون كما نوضحه فى كل باب ، وفى خروج التام والناقص والزائد امتحان وقع لبعض الناس ، وهو أن كل زوج ضرب فى عدد أول كيف كان ، بعد أن يكون زوج الزوج أكبر من نصف ذلك الأول بنصف ، فإن المجتمع منه أبداً عدد تام مثل الاثنين فى الثلاثة والأربعة فى السبعة ، فان كان أكثر من نصفه بأكثر من نصف واحد فالمجتمع زائد ، وإن كان أقل من نصفه كيف كان فالعدد ناقص ، مثال الأول الأربعة فى الخمسة ، ومثال الثانى الأربعة فى التسعة وفى الأحد عشر ، وكل عدد من الأعداد التامة ضرب فى عـــدد أول لا يعد ذلك العدد الأول ذلك العدد التام إذ حدث

عدد زائد على جميع أجزائه بضعف العدد التام مثل الستة إذا ضربت فى سبعة فحدث اثنان وأربعون ، له من الأجزاء النصف وهو واحد وعشرون ، والثلث وهو أربعة عشر ، والسدس وهو سبعة ، والسبع وهو ستة ، والجزء من أربعة عشر وهو ثلاثة ، والجزء من أحد وعشرين وهو اثنان ، والجزء من اثنين وأربعين وهو واحد ، وجميع ذلك أربعة وخمسين وهو يزيد على اثنين وأربعين باثنا عشر وهو ضعف ستة .

وكل عدد لا يعده اثنان وأربعة فهو ناقص أبدا ، وجميع الأعداد الأولية ناقصة لا محالة ؛ وجميع أزواج الزوج ناقصة بواحد ، وكل عدد خلاف الستة يعده الاثنان والثلاثة فهو زائد أبدا ، وكل عدد يعده الاثنان وعددان يكون سمى مجموعهما قام مقام الثلث ، أى يكون أجزاءهما مثل الثلث ، أى يكون التأليف من نسبتى جزئيهما يوازى الزائد ثلثا ، فهو زائد أبدا مثل مجموع (*) نسبتى الزائد خمسا والزائد تسعا فإنه يوازى الزائد ثلثا فهو زائد أبدا مثل السبعين فإنه لما عده مع الاثنين والخمسة والسبعة كان زائدا . وكل زوج فرد تركب كالثمانية عشرة والثلاثين فهو زائد أبدا ، فان كان مركبا من فرد أول فهو ناقص ، وقد يوجد فى زوج الزوج والفرد زائد وناقص وتام مثال الزائد أربعة وأربعين فهو زائد ومثال الناقص ستة وثلاثين ومثال التام ثمانية وعشرين ، والعدد الفرد لا يكون تاما كما علمت ولا يكون ناقصا ولا يكون زائدا إلا أن يكون مركبا من أربعة أفراد متتالية على النظام الطبيعى مثل ما أوله ثلاثة ثم خمسة ثم سبعة ثم تسعة ، مثل تسعمائة وخمسة وأربعون وهو أول عدد فرد زائد بالثلث (*) فإن ترك هذا الولاء لم يلزم أن يكون زائدا ، فلنختتم ها هنا الكلام فى هذا الفن من علم العدد ولننتقل إلى الفن الذى نعتبر فيه إضافة عدد إلى عدد .

تمت المقالة الأولى من الأرثماطيقى بحمد الله وحسن توفيقه .

---

(٣) الثلث وهو أربعة عشر : الثلاث وهو أربعة عشر وهو ثلثه (سا) .

(٧) وهو ضعف ستة : وهو ضعف ثلاثة (د) .

(١٢) يوازى الزائد ثلثاً : يوازى الزائد ثلاثاً (سا) .

(*) مجموع : صوابها ضرب لأن $\frac{٦}{٥} \times \frac{١٠}{٩} = \frac{٤}{٣}$

(١٩) يكون مركباً : يكون مربعاً (سا) .

(٢١) بالثلث : ثالثه (سا) .

(٠) الصواب عدد فرد زائد بثلاثين .

المقالة الثانية

أحوال العدد من حيث إضافته إلى غيره

أحوال العدد من حيث إضافته إلى غيره

قد ننظر فى العدد نظرا من جهة ما هو معتبر بنفسه وفى الأحوال التى تلزمه ، لأنه عدد ولأنه نوع عدد ، وقد ينظر فيه من جهات أخرى منها من جهة كونه مضافا إلى عدد آخر. وذاك العدد الأخير إن كان آخريته بالعدد لا بالنوع أو الصنف كانت الإضافة إضافة المساواة والمعادلة ، لا إضافة الخلاف والتفاوت ، وإن كانت آخريته بالصنف أو النوع كانت الإضافة إضافة التفاوت ، وكل متفاوتين فأحدهما زائد والآخر ناقص . وإذا عرفت أحوال الزائد عند الناقص عرفت أحوال الناقص عند الزائد على ما توجبه المعادلة فى الإضافة ؛ والزائد إما بسيط أو غير بسيط ، والبسيط إما ضعف أو أضعاف ، وإما زائد بجزء أو أجزاء واضمم التثنية إلى الجمع ، والمركب هو الزائد ، فذلك كله نسبة ، وإذا قلنا الأضعاف والأجزاء عنينا ما هو أكثر من ضعف واحد أو جزء واحد وإن كان ضعفين أو جزئين . والناقص فقد جرت العادة بأن ندل عليه بأنه الذى يجب كذا ، مثل قولنا الذى يجب لزائد جزءا ، وربما اشتق له اسم من اسم عدد الأضعاف ، مثل الثلث والربع والجزء من اثنى عشر ، وربما قيل بنسبتين كقولهم نصف السدس وخمس العشر فأول المضاعف الثانى وهو الذى الزيادة فيه بالمثل وابتداؤه فى الأعداد من الواحد والاثنين ، وتزايد الناقص على ترتيب الأعداد المتوالية ، والزائد وهو الضعف على ترتيب الازواج المتوالية تتفاضل اثنين اثنين ، ثم المضاعف الثلاثى وهو الذى الزيادة فيه بالمثلين ، وابتداؤه من الثلاثة والواحد ، ويتزايد الناقص على ترتيب الاعداد المتوالية ، والزائد بثلاثة ثلاثة مثل ثلاثة وستة وتسعة واثنى عشر ، وعلى

(٧، ٨) وإن كانت آخريته بالصنف أو النوع كانت الإضافة : إضافة التفاوت : ساقطة فى ب .

(٨) ويتزايد الناقص : اثنى عشر (ب) .

هذا القياس يتزايد الناقص من جميع النسب الضعفية بواحد واحد والزائد بعدة الأضعاف ويكون ابتداء الناقص من الواحد ، وابتداء الزائد من العدد المسمى بعدة الأضعاف ، وأول الزائد جزء هو الزائد على الآخر بمثل نصفه ، وابتداؤه من الثلاثة والاثنين. ويتزايد الناقص على ترتيب الأزواج المتتالية لما كان له نصف ، والزائد بثلاثة ثلاثة ، مثل الاثنين مع الثلاثة ثم الأربعة مع الستة ثم الستة مع التسعة وبعد الزائد نصف الزائد ثلثا ، وابتداؤه من الأربعة والثلاثة ويتزايد الناقص بثلاثة ثلاثة كثلاثة والستة والتسعة والزائد بأربعة أربعة ، وكذلك يستمر على هذا القانون . فإذا رسم لوح ذو جدول مربع يبتدئ من الواحد ، وتتزايد أول سطوره طولا وعرضا على ترتيب الأعداد الطبيعية ، وكذلك تبينت فيه هذه النسب وأحكام أخرى خارجة عنها .

فليكن هذا اللوح المجدول عشرة فى عشرة ، فتجد السطر الثانى على نسبة الضعف للسطر الأول ، والثالث على نسبة الثلاثة أضعاف ، وكذلك ، وتجد التفاضل على ما قبل ذلك ، وتجد السطر الثالث للثانى على نسبة الزائد جزءا ، وهو على نسبة الزائد نصفا ، والرابع للثالث على نسبة الزائد ثلثا ، والخامس للرابع على نسبة الزائد ربعا ، وكذلك على الإستمرار ، وتجد التفاضل على ما قيل لك ، وتجد زيادة السطر الثانى على السطر الأول يختلف بالعدد وإن لم يختلف بالنسبة ، فتجد زيادة البيت الأول منه على البيت الأول من السطر الأول بواحد ، وزيادة الثانى منه على البيت الثانى من الشطر الأول باثنين . وكذلك على ترتيب الأعداد المتتالية ، وكذلك حال كل بيت عند المتقدم عليه . وتجد ذلك فى المقايسة بين الثالث والأول فى كل ترتيب على ترتيب الأزواج ، فتجد الأول من كل ثالث يزيد على الأول من كل أول باثنين ، والثانى بأربعة ، والثالث بستة ، وكذلك ، وأما زيادة البيت الأول من كل رابع على البيت الأول من كل أول فثلاثة ثلاثة، وزيادة الثانى من الرابع على الثانى من الأول بستة ستة ، وكذلك زيادة كل بيت تزيد على زيادة البيت تحته بثلاثة ثلاثة ، وتجد زيادة الرابع (*) على الثانى وبينهما سطر واحد كزيادة الثانى على الأول فى النسبة . وزيادة السادس على الثالث وبينهما سطران كزيادة الرابع على الثانى فى النسبة ،

(*) فى الأصل الثالث ، والرابع هو الصواب .

١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
٢٠	١٨	١٦	١٤	١٢	١٠	٨	٦	٤	٢
٣٠	٢٧	٢٤	٢١	١٨	١٥	١٢	٩	٦	٣
٤٠	٣٦	٣٢	٢٨	٢٤	٢٠	١٦	١٢	٨	٤
٥٠	٤٥	٤٠	٣٥	٣٠	٢٥	٢٠	١٥	١٠	٥
٦٠	٥٤	٤٨	٤٢	٣٦	٣٠	٢٤	١٨	١٢	٦
٧٠	٦٣	٥٦	٤٩	٤٢	٣٥	٢٨	٢١	١٤	٧
٨٠	٧٢	٦٤	٥٦	٤٨	٤٠	٣٢	٢٤	١٦	٨
٩٠	٨١	٧٢	٦٣	٥٤	٤٥	٣٦	٢٧	١٨	٩
١٠٠	٩٠	٨٠	٧٠	٦٠	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠

وكذلك تجد كل عدد من أعداد القطر مربعا مثل الأربعة والتسعة والستة عشر ، وتجد مجموع كل مربعين ومجموع المسطحين اللذين بينهما على التجويف مربعا ، فمثل مجموع الأربعة مع التسعة ومع الستة والستة ، وذلك خمسة وعشرون ، وتجد مجموع كل مربعين متتاليين من مجموع المسطحين يزيد بواحد ، فيلزم أن يكون ضعف مجموع كل مربعين منقوصا منه الواحد مربعا . وتجد مضروب كل عدد من سطر فى عدد من سطر آخر يكافئه ضرب النظير فى النظير ، مثل الاثنين وهو الثانى من الأول فى العشرين وهو الآخر من الثانى فهو مثل الأربعة الذى هو الثانى من الثانى فى العشرة الذى هو الأخير من الأول . وتجد مضروب كل عدد من أعداد القطر فى نظيره من الجانب الآخر من ذلك القطر ، مثل نظيرهما أحدهما فى الآخر ،أعنى من القطر الآخر ، مثل مضروب الواحد فى مائة فهو مثل مضروب العشرة فى العشرة ، ثم مضروب الأربعة فى الأحد والثمانين مثل مضروب ثمانية عشر فى ثمانية عشر ، وكذلك .

وأما النسب الأخرى فلك أن تعتبرها من هذا الجدول فإنا نشير إلى كيفية التدبير فى طلب أعدادها الأولى ، ونشير إلى أحوال تخصها ، ثم نشير إلى اعتبارها من هذا الجدول . فنقول أما نسب الزائد بجزئين أو زائد بأجزاء فربما كان خالصا وربما لم يكن خالصا ، والخالص أعنى به ما لا يرجع إلى نسبة

(٢١) ثمانية عشر فى ثمانية عشر : الثمانية عشر الثانية ساقطة فى (د) .

(٢٤) نسب الزائد بجزئين : نسبة الزائد بجزء (ب) .

مثل وجزء رجوع الزائد بسدسين إلى الزائد ثلثا ، والزائد بربعين إلى الزائدنصفا ، وكذلك كل زائد بجزئين سميهما زوج ، ورجوع الزائد بثلاثة أسداس إلى النصف ، وأربعة أثمان إلى النصف ، وأيضا مثل الزائد بخمسين والزائد عليه بثلاثة أرباع . وليس يوجد للخالص قانون مشترك فيه بل يحتاج كل باب إلى امتحان قانون جديد . وأما أن أجد مطلقا فالقانون فى تحصيل عدده الأول أن يحصل أول سمى ذلك الجزء من الأعداد وأن ما يزيد عليه إن كان جزءين فاثنين ، وإن كان ثلاثة أجزاء فثلاثة ، مثاله إن كانت الزيادة ثلثين وضعت ثلاثة وزدت عليه اثنين وكان خمسة فيكون إبتداؤه من ثلاثة وخمسة ، وإن كانت الزيادة ثلاثة أرباع وضعت أربعة وزدت عليه ثلاثة فكان أربعة وسبعة وهو المبدأ ، فتجد الأعداد الناقصة فى نسبة المثل وجزئين ، تتزايد بثلاثة ثلاثة والزائد بخمسة خمسة حتى يكون ثلاثة وخمسة ثم ستة وعشرة ثم تسعة وخمسة عشر ،وأما فى نسبة مثل رُبعين وهى غير خالصة فهى الناقصة تزايد بأربعة أربعة والزائدة ستة ستة على قياس أربعة وستة وثمانية واثنى عشر ، وكذلك الناقص مثل نفسه والزائد مثل نفسه ، وعليه القانون فى الزائد خمسين .

وأما مقايسة بعضها ببعض ، أعنى مقايسة الزائد ثلثين والزائد ربعين ثم الزائد خمسين فان النواقص تتزايد بواحد واحد ، والزوائد أيضا تتزايد بواحد واحد ، فإن اعتبرت الخواص فى هذه النسبة كانت على ترتيب الأفراد المتتالية مثل الخمسة للثلاثة وهو الزائد بثلثين والسبعةللخمسة وهو الزائد بخمسين والتسعة للسبعة وهو الزائد بسبعين . وأما المقايسات بين كثرة الأجزاء مثل الزائد بمثله وثلاثة أرباع ، فإن المتجانسة منها تتزايد نواقصها وزوائدها على القياس المذكور ،وحتى تكون أربعة وسبعة ثم ثمانية وأربعة عشر ، وكذلك زيادة ثلاثة أخماس يكون خمسة وثمانية وعشرة وستة عشر ، ويكون مناسبات ما بينها على حسب ما قيل فى الأول مثل أربعة وسبعة ثم خمسة وثمانية ثم ستة وتسعة . ويوجد للخالص قوانين غير مستمرة إلا فى باب

---

(١) مثل وجزء : ساقطة فى (ب) .

(٨) من ثلاثة : من اثنين (ب) .

(٩) وزدت عليه ثلاثة : ثلاثة ساقطة من (د) .

(١٥) وأما مقايسة بعضها عن البعض أعنى : ساقطة فى (ب) .

(١٩) وأما المقايسات بين كثرة الأجزاء : وأما المقايسات كثيرة الأجزاء (ب) .

(٢٠) تتزايد : ساقطة فى (د) .

يخرج بالامتحان ، فإذا أردت أن تجد أول عدد بنسبة المثل والجزء فتجد سمى الجزء من العدد مثل الاثنين للنصف والثلاثة للثلث ، وضعف ذلك العدد باثنين وزد عليه واحدا مثل الضعف والنصف . فان أنشاه من تضعيف الاثنين والزيادة عليه واحد فيكون اثنان وخمسة والضعف والثلث فإن أنشأته من تضعيف الثلاثة والزيادة عليه واحد فيكون ثلاثة وسبعة ومثل الضعف والربع فإن أنشأته من تضعيف الأربعة وزيادة واحد حتى يكون أربعة تسعة فتجد الأعداد فى الأول تتزايد الناقص باثنين اثنين على ترتيب الأزواج المتتالية ، ويتزايد الزائد بخمسة خمسة حتى يكون من الزائد نصفا اثنين وخمسة ثم أربعة وعشرة ثم ستة وخمسة عشر ، وتجد الأعداد فى الثانى وهو نسبة المثلين والثلث يتزايد الناقص فيها بثلاثة ثلاثة والزائد بسبعة سبعة مثل ثلاثة وسبعة ثم ستة وأربعة عشروتسعة وأحد وعشرون، وتجد الأعداد فى الثالث يتزايد الناقص فيها بأربعة وأربعة والزائد بتسعة تسعة حتى يكون على توالى أربعة وتسعة ثم ثمانية وثمانى عشرة ثم اثنى عشر وسبعة وعشرين ، وبالجملة فإن تزايد الناقص يكون على عدده الأول وتزايد الزائد على عدده الأول .

وأما المناسبة فيما بين مراتبها ، أعنى مناسبة ما بين الضعف والنصف وبين الضعف والثلث فان النواقص تتزايد واحد بواحد والزوائد باثنين اثنين بحسب الضعفية حتى يكون اثنان وخمسة ثلاثة وسبعة وكذلك ، وتجرى الزوائد على الأفراد المتتالية . وأما نسب الضعف والجزئين فيجب أن يعمل فى إنشائه ما عملته إلا أن تزيد بدل الجزء جزئين ، فيبتدىء إما فى نسبة الضعف والثلثين من الثلاثة والثمانية وفى نسبة الضعف والربعين وهى غير خالصة من الأربعة والعشرة ، وفى نسبة الضعف والخمسين من الخمسة والاثنى عشر فتجد الزوائد أيضا تتزايد باثنين اثنين والنواقص بواحد واحد . وتجد الاستمرار فى باب واحد مثل ترتيب الأعداد الموضوعة لمثلين وثلثين ، فتجد النواقص والزوائد تتزايد على أعدادها إلا أنك تجد عدد النواقص كما كان فى مثل وثلث وضعف وثلث وعدد الزوائد ضعف ما كان فيهما ، وكذلك فى ضعف وربعين وضعف وخمسين وسائر ذلك . وإذا جرت إلى الضعف والثلاثة أجزاء وأولها ثلاثة

---

(١٧) وتجرى الزوائد على الأفراد المتتالية : ساقطة فى (ب) – والجزئين : والمثلين (د) .

(٢١) الخمسة : الستة فى (ب) .

(٢٣) تتزايد : ساقطة فى (سا) ، (د) .

أرباع فالإنشاء على ذلك السبيل بعينه ، لكنك تزيد للزائد ثلاثة أجزاء ثلاثة وللزائد أربعة أجزاء أربعة فأول الضعف والثلاثة الأجزاء الضعف والثلاثة أرباع وابتداؤه من الأربعة والأحد عشر ، ثم الضعف والثلاثة أخماس وابتداؤه من الخمسة وابتداؤه من الخمسة والثلاث عشر ، ثم الضعف والثلاثة أسداس وابتداؤه من الستة وخمسة عشر ، وكذلك فتجد تزايد مراتب الأعداد كما كان ، فإن راعيت ما في باب واحد وجدت النواقص والزوائد أيضا تتزايد على مثل أنفسها ، لكن عدد النواقص يكون كما كان وعدد الزوائد عدد آخر ، فإن أردت النسبة ثلاثة أضعاف وجزءا أو جزئين أو أجزاء فعلت في إنشاء ذلك ما فعلته إلا أنك لا تضعف مرة واحدة فقط بل بعدد تلك الأضعاف ثم تفعل بالجزء والأجزاء ما فعلت ، وتجد أول ثلاثة أضعاف وثلث من ثلاثة وعشرة ، وأول ثلاثة أضعاف وربع من أربعة وثلاثة عشر ، فتجد النواقص تتزايد بواحد واحد والزوائد بثلاثة ثلاثة . فإن أخذت عرضا وجدت أول ثلاثة أضعاف ونصف من اثنين وسبعة ، وثانية من أربعة وأربعة عشر ، فتجد أيضا الزائد يتزايد بعدده والناقص يجري على تزايد الأزواج المتتالية ووجدت أول ثلاثة أضعاف وثلث من الثلاثة والعشرة وثانية من الستة والعشرين فتجد الأصل محفوظا . فإن اعتبرت الثلاثة أضعاف والجزئين كان أول ثلاثة أضعاف وثلثين من ثلاثة وأحد عشر ، وأول ثلاثة أضعاف وربعين من أربعة وأربعة عشرة ، وأول ثلاثة أضعاف وخمسين من خمسة وسبعة عشر ، فتجد التفاضل في النواقص على ولاء الأعداد الطبيعية والزوائد ثلاثة ثلاثة ، وإن أخذت عرضا وجدت أول ثلاثة أضعاف وثلثين من ثلاثة وأحد عشر وثانية من ستة واثنين وعشرين وحفظت القانون . فإن اعتبرت الثلاثة أضعاف والثلاثة أجزاء كان أول ذلك ثلاثة أضعاف وثلاثة أرباع وأوله من أربعة وخمسة عشر ، ثم ثلاثة أضعاف وثلاثة أخماس وأوله من خمسة وثمانية عشر ، فتجد الأمر كذلك. وإن اعتبرت عرضا وجدت أول ثلاثة أضعاف وثلاثة أرباع من أربعة وخمسة عشر ، وثانيه من

---

(١) ثلاثة أجزاء ثلاثة : أجزاء ثلاثة ساقطة في (سا) .

(٣) من الخمسة وابتداؤه من الخمسة والثلاث عشرة : ساقطة في (سا) ومكتوب بدلها من الأربعة والأحد عشر .

(١٥) من ثلاثة وأحد عشر : من تسعة وأحد عشر (سا) ، (ب) .

(٢١) فتجد الأمر كذلك : ساقطة في (ب) .

ثمانية وثلاثين ، ووجدت ذلك القانون ، ولك أن تزيد فى هذا وتغير أيضا مناسبة الجمل والحمل ، وسنخرجه لكن يقتصر على هذا ونذكر إشارات لوحية تسير بهذه .

فمن ذلك أنا إذا عملنا جدولا من سطرين أحدهما يتتالى فيه الأفراد المتتالية مبتدئة من خمسة ، ولنقف عند أحد وعشرين ، والثانى تتوالى فيه الأعداد مبتدئة من ثلاثة ، وتقف عند أحد عشر ، لاح لك فيها بين ذلك نسب فإذا اعتبرنا ما فى كل بيت من الجدول

٢١	١٩	١٧	١٥	١٣	١١	٩	٧	٥
١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣

الأول ، مضافا إلى نظيره من الآخر أدى أوائل الأعداد التى ابتدأت من المثل والثلثين ، ثم المثل والثلاثة أرباع ، ثم المثل والأربعة الأخماس وكذلك ، فإن اعتبرنا تزايدها فى البيت الأول كان على نسب مثل وجزئين الخالصة ، وإن اعتبرنا ترتيب مافى البيت الثانى كان كذلك بنسب الزائد جزءا ، وإن وضعنا بدل البيت الثانى المبتدئ من ٣ بيتا آخر يبتدأ من اثنين ويجرى على ولاء الأعداد التى بالطبع كان نسبة البيت

٢١	١٩	١٧	١٥	١٣	١١	٩	٧	٥
١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢

الأول من السطر الأول إلى نظيره من السطر الثانى على نسبة مثلين ونصف ونسبة البيت الثانى من السطر الأول إلى نظيره من السطر الثانى فى نسبه مثلين وثلث ، وأدى أوائل أعداد جميع نسب المثل والجزء . ولك أن تستخرج من هذا جداول لسائر النسب الباقية ، على أن اللوح الأول يشير لك إلى جميع النسب فتخرج لك نسبة المثل والجزء

(١ - ٢) وتغير أيضاً مناسبة الجمل والحمل وسنخرجه لكن يقتصر على هذا ، ونذكر إشارات لوحية تسير بهذه فمن ذلك : ساقطة فى (ب) وفى د .

(١١) كان كذلك : المبتدئ من بيت آخر (ب) .

(١١) الزائد : غير موجودة فى سا .

(١٦) أدى : ساقطة فى (ب) .

مما علمت ، ونسبة المثل والجزئين من الجدول الخامس والثالث وهوللمثل والثلثين ، ومن الجدول السادس والرابع وهو للمثل والربعين ، ومن الجدول السابع والخامس وهو للمثل والخمسين ، وكذلك . ويخرج من الجدول السابع والرابع بترك جدولين فى البين نسبة المثل والثلاثة أرباع ؛ ومن الجدول الثامن والخامس بترك جدولين نسبة المثل والثلاثة أخماس ، وكذلك ويخرج لك من الجدول التاسع والخامس بترك ثلاثة جداول نسبة المثل والأربعة الأخماس ، ومن الجدول العاشر والسادس نسبة المثل والأربعة الأسداس ، وكذلك . ويخرج لك نسبة المثلين والجزء من ذلك اللوح أيضا ، أما أوله فنسبة المثلين والنصف بترك جدولين من الجداول الخامس والثانى ، وثانيه فنسبة المثلين والثلث فمن الجدول السابع والثالث يتخطى ثلاثة ، وثالثه نسبة المثلين والربع من الجدول التاسع والرابع يتخطى أربعة ويخرج لك نسبة المثلين والجزئين ، أما الثلثان فمن الثامن والثالث ، والربعان من العاشر والرابع ويخرج لك نسبة المثل وثلاثة أجزاء وسائر النسب إذا رعيت المذهب الذى أومأنا إليه .

وقد أشار القدماء إلى طريقة تنشأ من تساوى النسب وتؤدى إلى النسب المختلفة من النسب المشار إليها ، فإنه أى أعداد متساوية رتب منها ثلاثة أمكن أن تنشأ النسب كلها منها بطريقة تستعمل فيها ، فليكن جدولا فيه ثلاثة أفراد ، ثم ثلاثة أعداد أخرى ، ثم ثلاثة أخرى ،وليكن بلا ثبات تكثر الاعتبار والتوسع فى الامتحان ، ولعله من الغرض جداول أخرى على قسمته ، فنقول إنك إذا أخذت الأول فأثبته فى البيت الأول من كل جدول فى العرض على أنه أول ، ثم جمعت الأول والثانى فرتبته فى البيت الثانى من الجدول الثانى وكان جدول الوحدانيات اثنين ، ثم الجدول الأول والثالث وضعف الثانى ، فرتبتهم فى البيت الثالث منه فكان من جدول الوحدانيات أربعة ، ثم جعلت البيت الثانى أصلا وجمعت منه ذلك الجمع ونقلته إلى البيت الثالث ذلك النقل واستمر تدبيرك هذا فى عدة أبيات ولكن أربعة فى الطول عرض من ذلك أولا إن كان نسبة كل ثلاثة أعداد فى صف واحد

---

(٧) المثل : مرتبكة فى (ب) – ثم المثل والأربعة الأخماس وكذلك : ساقطة فى سا .

(٩) وثانية : وتاسعة (سا) وهو خطأ .

(١٤) أمكن أن ينشأ : أن ينسب (سا) .

(١٥) أفراد : آحاد (ب) .

(١٧–١٨) فأثبته فى البيت الأول من كل جدول فى العرض على أنه أول ثم جمعت الأول : ساقطة فى (سا) .

١	١	١	١
٢	٢	٢	٢
٣	٣	٣	٣
٤	٤	٤	٤

٤	٢	١
٨	٤	٢
١٢	٦	٣
١٦	٨	٤

نسبة متصلة ، ونشأ منه من النسب المطلوبة أولا نسب الأضعاف ، فتجد ما فى البيت الثانى على نسبة المثلين وما فى البيت الثالث على نسبة الثلاثة أضعاف وما فى البيت الرابع على نسبة الأربع أضعاف ، وليستمر ذلك إلى غير النهاية ، وعرض إن كان عدد ما فى البيت الثانى على نسبة من السطر الثانى على نسبة الضعف مما فى البيت الأول ، وعدد ما فى البيت الثالث منه على نسبة الزائد نصفا لما فى البيت الثانى ، وما فى البيت الرابع على نسبة الزائد ثلثا لمـــا فى البيت الثالث وكذلك ، وما فى البيت الثانى من السطر الثالث على نسبة أربعة أضعاف لمـــا فى البيت الأول ، وما فى البيت الثالث على نسبة مثلين وربع لما فى البيت الثانى ، وما فى البيت الرابع على نسبة مثل وسبعة اتساع لمـــا فى البيت الثالث ، ولم يكن لهذا نظام : فإن أحببنا أن ندبر لتصور النسب الأخرى عرضا تصورنا للنسب الأضعاف ، عكسنا السطر الثانى طولا حتى وقع الثالث فى الأول والأول فى الثالث ، وبقى الوسط على حاله ، فإذا أخذنا نجمع الجمع المذكور من هذا الموضع ، نأخذ الأول فننقله أولا فى السطر الثالث فيكون أربعة ، ثم تجمع الأول والثانى وننقله إلى السطر الثالث فيكون ستة ، ثم نجمع الأول وهو أربعة والثالث وهو واحد والضعف الثانى وهو أربعة ، وننقله إلى البيت الثالث فيكون تسعة وتتوالى أعداد السطر على نسبة الزايد نصفا ، وقد تولد من نسبة الضعف وسمهما جميعا الاثنان . فإن عملت هذا العمل بالسطر العرضى الذى لنسبة ثلاثة الأضعاف ، أخرج لك أعدادا ثلاثة على نسبة الزائد ثلثا ، فإن البيت سمى كليهما . وكذلك الحال فى الجدول الرابع فإنه يخرج نسب الزائد ربعا . فإن قلبت جدول وضع أعداد

(٩) لما فى البيت الثالث : الثالث ساقطة فى (د) .

الزائد نصفا ، ثم فعلت به الفعل المذكور تولد لك من الزائد جزءا الزائد جزئين ، ومن الزائد ثلثا الزائد ثلاثة أجزاء وعلى هذا النسق فإن لم تقلب وضع أعداد الزائد نصفا تولد نسبة الضعف والنصف ، ومن الزائد ثلثا نسبة الضعف والثلث . وإذا قلبت أعداد الزائد أجزاء ودبرت التدبير المعلوم ، وحفظته على حاله مرة أخرى ودبرت التدبير المعلوم خرج لك سائر النسب ، ولا تزال تخرج لك بعضها من بعض إلى غير النهاية حتى تشاهد نسق جميع ذلك من نسبة المساواة ، ولك

٦٤	٢٤	٩
٢٥	١٥	٩
٩	٦	٤
٤	٢	١
١	١	١

أن تعكس فتجد سائر النسب كلها يرجع إلى نسبة المساواة ، مثاله أنك إذا وضعت أعدادا ثلاثة على نسبة متوالية فحفظت الأصغر لحاله ثم حذفته من الأوسط وجعلت ما بقي حدا أوسط ، ثم ألقيت من الأكبر مثل الأصغر ومثل ضعف الباقي من الأوسط ، وجعلت الباقي حدا ثالثا ، وجدت نسبة متصلة ، ثم تفعل بهذه الأعداد والحدود ذلك الفعل، فتخرج لك نسبة أخرى، وكذلك حتى تؤديك إلى نسبة المساواة ، مثاله لتكن الأعداد أولا على نسبة مثلين وثلثين مثل تسعة وأربعة وعشرين وأربعة وستين فاحفظ تسعا ، وأسقطه من أربعة وعشرين ، واجعل ما يبقى وهو خمسة عشر حدا ثانيا ، فخذ ضعفه مع تسعة وأسقطهما من أربعة وستين يبقى لك خمسة وعشرين فاجعله ثالثا ، يخرج لك أعداد متوالية على نسبة الزائد ثلثين . ثم اصنع هذا الصنع بما عندك يخرج لك تسعة وستة وأربعة تخرج لك أعداد متوالية على نسب الزائد نصفا ، ثم اصنع هذا الصنع بهذه الأعداد تخرج لك أربعة اثنان واحد ، وذلك على نسبة الضعف ، ثم إذا صنعت هذا الصنع خرج لك واحد وواحد ، وواحد وعاد إلى نسبة المساواة ، كذا الحال إن حللت نسبة الثلاثة

(١) تولد : ساقطة في (د) . الزائد أجزاء : الزائد جزءاً : ب .
(١٤) حداً أوسط : حد الوسط (سا) - الباقي : الثاني (سا) .
(١٩) حداً ثانياً : جداً تالياً .

أضعاف والأربعة الأضعاف وسائر النسب التى لم نذكر تحليلا لها بالعكس وعاد إلى نسبة المساواة من الطريق الذى منه ركبت .

لننتقل الآن إلى تأليف نسبة فى الأعداد من نسبتين : ونقدم لذلك مقدمة جامعة تكفى مؤونة امتحان الحال فى نسبة وهو أن كل مثال جزئى يؤدى لتأليف نسبة فى الأعداد من نسبتين ، فقد وجدت النسب فى ذلك الجزء على صفة مايدلك على كل نافذ فى كل أعداد تكون على تلك النسب ، لتكن أ ب مثلا أربعة ولتكن أ حـ اثنان ولتكن أ د ثلاثة فيكون ل أ ب إلى أ د نسبة وهى نسبة الزائد ثلثا وتكون ل د أ إلى جـ أ نسبة وهى نسبة الزائد نصفا ، ول أ ب إلى أ حـ نسبة وهى نسبة الضعف ، وهى مؤلفة لامحالة من هاتين النسبتين . فأقول إن كل نسبة للزائد نصفا تضاف إليها نسبة الزائد ثلثا فيكون المجتمع ما اجتمع هاهنا بعينه ، وإن كل نسبة الزائد ثلثا تضاف إليها نسبة الزائد نصفا يكون المجتمع ما اجتمع هاهنا وكل نسبة الضعف ، فيحتمل أن يقسم بهاتين النسبتين وفصل إليهما ، وإلا فلتكن هـ ز : هـ ح نسبة الزائد نصفا ، ونسبة هـ ح : هـ و نسبة الزائد ثلثا فأقول إن نسبة هـ ز هـ و نسبة الضعف ، فإنك تعلم أن بالتفضيل نسبة بد ز ح إلى د أ هـ ز واحدة ، وبالتفصيل نسبة ء اهـ ز إلى حـ د ز ج واحدة ، فبالمساواة نسبة بد ز ج مثل نسبة هـ د ز ح ، فتكون نسبة جميع ب حـ إلى جـ د وجميع هـ ز إلى و ز واحدة ، ولكن نسبة أ حـ إلى أ د مثل نسبة هـ ح إلى هـ ز ، فبالتفضيل تكون نسبة د جـ ء ا مثل ح ز ز هـ ، وبالمساواة نسبة ب حـ : حـ أ كنسبة و ز ، و هـ ، وبالتركيب نسبة أ ب أ جـ هى نسبة هـ ز هـ و . وكذلك إذا كان الموضوع النسبة المركبة ، فإنه إذا كان فى هذا الجزء بالنسب كما كان ، ثم أوردنا أى عددين كان ، ولتكن هـ ز هـ و وكان على نسبة الضعف ، فنقول إن نسبة الزائد نصفا على هـ ز يقع بين ز و و ، وإلا فليقع خارجا مثل ز ط . فإذا أضفت إليهما النسبة الأخرى مثل ط ى عادت النسبة المركبة الأولى ، فكان حينئذ

---

(٧) الزائد ثلثا : الزائد ثلاثاً (سا) .

(٨) و ل اب إلى ا جـ نسبه : ساقطة فى (سا) .

(١٤) نسبة هـ ز هـ و : نسبة هـ ز هـ ح (ب) – ز ح : ء ح – (د) .

(١٥) ءا هـز : ءاز (ب) ـ ء ء ز ح : ء ء : ءح (سا) .

(١٦) هـء ، زح : ءح حـء (ب) ـ بـحـ إلى حـ ء : بـح إلى ءح (ب) .

(١٧) ءا إلى احـ مثل هـ ح إلى هـ ز : ء ءح حـا مثل نسبة حـء ء ه ـ (ب) .

(١٨) كنسبة : ساقطة من (د) .

(١٩) هـ ز هـ و : هـ و زح (ب) .

نسبة ط ى هـ ز مثل نسبة هـ و هـ ز ، على ما رتبنا ، وكان ماهو أعظم من هـ و مثل هـ ز ، فإذن يقع داخلا مثل ج ، فنقول إن نسبة هـ و هـ ج هى النسبة الأخرى وإلا فلتقع ل هـ ح مع هـ ط أو مع هـ ك ولفرض المحال المذكور. ولا تحسب أنا أوردنا برهانا جزئيا لذكرنا نسبتى النصف والثلث ونسبة الضعف، بل نحب أن تعلم أن هذا برهان كلى ، وإنما هو سبيلنا للتفهيم.. وإلا فلك أن تقول إن عدد ى أ ب أ ج عددان جزريان وبينهما نسبة ما وقد ألفت فى هذا المثال من نسبتى أ ب أ د ، أ د أ ج أى نسبة كانت بأن وقع عدد بينهما أنقص من أحدهما وأزيد من الأخر ، ثم يأتى البرهان على الوجه الكلى من غير إشارة إلى تعيين النسبة. فهذا البيان يكفى مؤونة التكلف فى إقامة البرهان على تأليف نسبة من نسبتين فى الأعداد ، وإذا وجدنا الأمثلة تخرج ذينك النسبتين فى تعليمنا الموسيقى بعد هذا الفن ، لكننا نتكلف بيانات خاصة لنسب ماهى كالرؤوس لسائر النسب ، من ذلك أما نقول إن نسبة الضعف ونسبة الزائد نصفا يتألف عنها نسبة الثلاثة الأمثال ، فلتكن أ حـ ضعف أ ب ، ولتكن أ د مثل ونصف أ ج ، أقول إن أ د ثلاثة أمثال أ ب ؛ برهان ذلك أن أ حـ ضعف أ ب ف ب حـ مثل أ ب ، فهو نصف أ حـ لكن حـ د نصف أ حـ ف أ ب ، ب حـ ، حـ د يساوى بعضها بعضا ، فيكون جميع أ د ثلاثة أمثال أ ب ، فإن كان حـ د ثلث أ حـ ف أ د ضعف وثلث أ ب ، فلنقسم أ حـ أثلاثا على هـ ، ز فيكون أ هـ مثل ج د وهو ثلث أ حـ الذى هو ضعف أ ب ، فنصف أ هـ ثلث أ ب ف أ هـ ثلثا أ ب ف أ د مثل ضعف أ ب أعنى أ حـ ومثل ثلثه أعنى ج د ، فإن كان نسبة أ ج أ ب نسبة الزائد نصفا ونسبة أ د أ ج نسبة الزائد ثلثا فنسبة أ د أ ب الضعف ، لنقسم أ ب نصفين على هـ فيكون أ هـ ب حـ د أ هـ مثل ب ، حـ ويكون أقسام أ هـ هـ ب ب حـ متساوية وهى ثلاثة و د ج مثل أ حـ ثلاثة أقسام أ ج فالأقسام الأربعة متساوية فجملة ب د مثل جملة أ ب وزيادة أ حـ على أ ب بالمثل ، فإن كانت نسبة أ حـ أ ب نسبة الزائد ثلثا ونسبة أ د ا حـ نسبة الزائد ثمنا ، فإن نسبة ا د ا ب نسبة الزائد نصفا .

فلنقسم ا ب أثلاثا على ز ، هـ فيكون أقسام ا ز ز هـ هـ ب ب ج متساوية وهى أربعة ، ونصف كل واحد منها هو ثمن ا ج وهو مساو ل حـ د ليكون ب د ثلاثة أمثال حـ د ، ا ب ستة أمثال حـ د ويكون ب د : د حـ ، وهو نسبة مثل ونصف ونسبة

---

(٩) فى الأعداد وإذا وجدنا الأمثلة تخرج ذينك النسبتين : ساقطة فى (سا) .

(١١) الزائد نصفا : الزائد جزءا (ب) .

بد د ح هى نسبة ا ب ب ح، فإذا بدلنا كانت نسبة بد ا ب نسبة د جـ ب، فبالتركيب ا د ا ب هى نسبة ب د ب ح وذلك نسبة المثل والنصف ، فان كانت نسبة ا ح ا ب نسبة مثل وربع ، ونسبة ا د أ جـ نسبةمثل وخمس فإن نسبة ا د ا ب نسبة مثل ونصف، وذلك لأن أ ب إذا انقسم أرباعا كان كل قسم مثل ب جـ وكانت أقساما خمسة متساوية ويكون ب د مثل نصف أ ب فإن كانت نسبة أ ح أ ب نسبة مثل وخمس ، ونسبة أ د أ ح نسبة مثل وسدس ، فإن نسبة أ د أ ب نسبة مثل وخمسين . ونبين كل ذلك بأن نقسم أ ب أخماسا ونعمل ما عملنا . ونبين لك من هذا أن النسبة المؤلفة من مثل وسدس ومثل وسبع هى نسبة مثل وثلث ، والمؤلفة من مثل وسبع ومثل وثمن هى نسبة مثل وسبعين ، والمؤلفة من مثل وثمن ومثل وتسع نسبة مثل وربع ، والمؤلفة من نسبة مثل وتسع ومثل وعشر نسبة مثل وتسعين ، والمؤلفة من نسبة مثل وعشر ومثل وجزء من أحد عشر نسبته مثل وخمس ، والمؤلفة من نسبة مثل وجزء من أربعة عشر ومثل وجزء من خمسة عشر نسبة مثل وسبع ، وكذلك على الولاء . وإذا كان أ ح أ ب على نسبة مثل وجزء من خمسة عشر و أ د أ ح على نسبة الزائد ربعا، فإن نسبة أ د أ ب مثل وثلث ، ذلك لأنك إذا قسمت أ ب خمسة عشر قسما كان جميع أ ح ستة عشر قسما و ح د ربع ذلك ، فهو أربعة أقسام ، فجميع ب د خمسة أقسام و أ ب خمسة عشر قسما وجميع أ د عشرون قسما، وب د ثلث أ ب ، ومثل هذا التدبير يبين أنه إذا كان أ ح أ ب على نسبة الزائد تسعا و أ د أ جـ على نسبة الزائد خمسا ، كان نسبة أ د أ ب على نسبة الزائد ثلثا وأنت يمكنك إذا سلكت هذه السبيل أن تبرهن على سائر مافى الموسيقى من التأليف على أن البيان المقدم يكفيك تكلف المؤونة فى ذلك كله .

تمت المقالة الثانية من الأرثماطيقى والحمد لله رب العالمين

وصلى الله على محمد

---

(١) فبالتركيب اد اب هى نسبة بد بح : ساقطة فى (ب) .
(٨) مثل وسدس : مثل وثلث (سا) ، (ب) .
(١٤) الزائد ربعاً : الزائد جزءان (ب) .
(١٨) اد اب : اب اد (ب) .
(١٩) سائر : تماين (ب) .

المقالة الثالثة

أحوال العدد من حيث كيفية تأليفه من الوحدانيات

(أحوال العدد من حيث كيفية تأليفه من الوحدانيات)

قد أشرنا لك إلى أحوال العدد من حيث كميته فى نفسه ، وأشرنا لك إلى أحوال من أحوال العدد من حيث إضافته إلى غيره ، ونحن نشير لك إلى أحوال العدد من حيث له كيفية تأليف من الوحدانيات لمشابهتها الأشكال المقدارية .

قد شبهت هيئات الأعداد فى تأليفها بالمقادير ، فقيل أعداد خطوطية وأعداد سطحية ومسطحة وأعداد جسمية ومجسمة . فالأعداد الخطوطية هى التى تبتدئ من الواحد وتستمر على نهجها ، وأول عدد خطى هو الاثنان ثم الثلاثة . وكذلك . وأما المسطحة فهى التى يمكن أن يؤلف بعضها إلى بعض تأليفا يحاكى بعض السطوح المشكلة والمجسمة ، فهى التى يمكن أن يؤلف بعضها إلى بعض تأليفا يحاكى بعض المقادير المجسمة ، وأول المسطحة هى الأعداد المثلثة ، وهى الأعداد التى إذا نظمت آحادهما نظما ما ، حاكت شكلا تحيط به ثلاثة أضلاع ، وأولها ثلاثة وصورتها ∴ هكذا ، ثم الستة وصورتها تحدث من إضافة خط عددى أزيد بواحد من الخط العددى الذى هو كما رأيته أضيف إلى الواحد ، فتولد المثلث الأول وهو الاثنان فيكون ثلاثة ونكون الصورة هكذا ⁖ ، وكذلك كلما أضفت إلى ذلك خطا عددا ما على نظام الأعداد المتتالية ، حدث مثلث أكبر ، مثل إنك إذا أضفت إلى ذلك خطا عدديا من أربع وحدانيات كان شكل مثلث آخر على هذه الصورة ⁘ ، فأول المثلثات ثلاثة وضلعه اثنان ، والمثلث الثانى ستة وضلعه ثلاثة ، والمثلث الثالث عشرة وضلعه أربعة ، والمثلث الرابع خمسة عشر وضلعه خمسة . وكل مثلث يزيد على الذى يليه تحته بضلع

---

(١٣) ثم الستة ...... وتكون الصورة هكذا : ساقطة فى (ب) .

(١٤) كلما أضفت : كلما زيد (سا) .

نفسه ، وتتفاوت أضلاعها على ترتيب الأعداد المتتالية من الواحد مع الواحد ، فأى عدد اجتمع لك من ذلك فهو مثلث ، وكل مثلث فضلعه يزيد على مرتبته بواحد . فإن قيل لك ما ضلع المثلث العاشر من أول الأعداد المثلثة ، فقل أحد عشر ؟ فإن أخذت الواحد فى جملة المثلثات كان عدد الضلع وعدد المرتبة واحدا ، ولكن الواحد وإن كان لك أن تقول إنه مربع أو مكعب بالقوة ، فليس مثلثا ولا مخمسا ولا شيئا من ذلك ، لا بالقوة ولا بالفعل ، إلا باشتراك الاسم ، ولا تلتفت إلى ما يقولون ، وكل مثلث فإنه نصف مضروب مرتبته فى الأزيد منه بواحد حتى لو قيل لك ما عدد المثلث الخامس أخذت خمسة وضربته فى أزيد منه بواحد ، فكان ثلاثين فأخذت نصفه وهو خمسة عشر وهو المثلث الخامس .

وكل ضلع مثلث فهو أقل عددين متتاليين بضرب أحدهما فى الآخر ، فيكون منه ضعف مثلثه ، حتى لو قيل ما ضلع خمسة عشر من المثلثات ، فإنا نضعفه فيكون ثلاثين ، فيطلب عددين متتاليين مسطحهما ثلاثون فنجده خمسة وستة ، فنقول إن ضلعه خمسة . وبعد الأعداد المثلثة الأعداد المربعة ، وهى التى عرفتها ، فهى تحدث من خطوط عددية متساوية ، عددها عدد ما فى الواحد من الآحاد ، وضلوعها على ترتيب الأعداد مبتدئة من الواحد ، مثل الواحد فإنه مربع الواحد والأربعة فإنه مربع الاثنين والتسعة فانه مربع الثلاثة والستة عشر فإنه مربع الأربعة والخمسة والعشرون مربع الخمسة على هذه الصورة وإنشاؤها من جميع الأفراد المتوالية مع الواحد ، مثل الثلاثة والواحد فهو أربعة وهو أول عدد مربع ، ثم الواحد والثلاثة والخمسة وهو تسعة وهو العدد المربع الثانى ، ثم الواحد والثلاثة والخمسة والسبعة وهو ستة عشر وهو العدد المربع الثالث ، ثم الواحد والثلاثة والخمسة والسبعة والتسعة وذلك خمسة وعشرون وهو العدد المربع الرابع .

---

(١٠) وكل ضلع : وكل ضعف (سا) .
(١٥) فإنه مربع الواحد . والأربعة فإنه : ساقطة فى (سا) .
(١٩) ثم الواحد والثلاثة والخمسة وهو تسعة وهو العدد المربع الثانى : ساقطة فى (سا) ، (ب) .
(٢١) المربع الثالث : المربع الثانى (سا) .

ومن خواص المربعات أنك إذا جمعتها من مربع الواحد كان مجموعها أكبر من مربع الأخير بما قبلها من المربعات ، مثاله أن مجموع مربعى الواحد والاثنين يزيد على مربع الاثنين بمربع الواحد ، ومربع الواحد والاثنين والثلاثة يزيد على مربع الثلاثة بمجموع مربعى الواحد والاثنين ، وكذلك مع الواحد والاثنين والثلاثة والأربعة يزيد على مربع الأربعة . لمجموع مربعات الواحد والاثنين والثلاثة .

وقد استخدموا لإنشاء المربعات طريقا يسمونه المرقص ، وهو أنك إذا ابتدأت من الواحد، فجمعت ما شئت من المراتب ثم عطفت فنزلت جامعا، فما كان مجموع ذلك فهو مربع ، مثل أن تصعد من الواحد إلى الاثنين فيكون ثلاثة ، ثم تجمع إلى الواحد فيكون أربعة وهى مربع أول ،ثم إن جمعت الواحد والاثنين والثلاثة،فأضفت إليه الاثنين ثم الواحد كان تسعة وهو مربع ثان ، فإن صعدت من الواحد والاثنين والثلاثة والأربعة جامعا ، ثم نزلت فجمعت الثلاثة والاثنين والواحد كان جميع ذلك ستة عشر ، وهو المربع الثالث من المربعات العددية . وتحصيل هذه الطريقة أن مجموع كل أعداد متوالية مع مجموع ما ينقص منه بالمرتبة الأخيرة ، فهو مربع أيضا ضعف مجموع كل أعداد متوالية الا العدد الأخير فهو مربع ، وكل مثلثين متواليين يجمعان من الواحد والثلاثة والثلاثة والستة فهو مربع ، وهذا أيضا إنشاء المربعات ، فيكون كل مربع من مثلث فى درجته ومثلث أنقص من درجته بواحد . وكل مربعين يضرب ضلع أحدهما فى الآخر بضعف ويجمع إلى المربعين ، فالجميع مربع ، مثل مضروب اثنين فى ثلاثة إذا جمع ضعفه مع أربعة وتسعة فكان خمسة وعشرين . وكل مربع يزاد عليه جزآن متباعدان كان وإلى مثله ومثل ربعه أو ثلاثة أمثاله ، أو نقص منه ثلاثة أرباعه ، فما يحصل فهو مربع ، ولامربع نصفه أو ضعفه مربع ، ولا تجمع المربعات المتتالية مبتدئة من الواحد مربعا ألبتة ، وكل مربع فإما أن يكون له ثلث صحيح : واعلم أن آحاد العدد المجذور لاتخلو إما أن يكون واحدا أو أربعة أو خمسة

---

(٣) بمربع الواحد : بواحد (ب) .

(٦) وقد استخدموا : وقد استخرجوا (د) .

(٧) فنزلت : فتركت (سا) .

(٩) مربع أول : مربع أقل (سا) .

(١٨) مثل : مثل عدد (سا) .

(١٩) صاعدان : ساعدان (سا) — متباعدان (ب) .

أو ستة أو تسعة ، فإن كان واحدا فآحاد ضلعه إما تسعة وإما واحد ، وإن كان أربعة فثمانية أو اثنان ، وإن كان خمسة فخمسة ، وإن كان ستة فستة أو أربعة ، وإن كان تسعة فثلاثة أو سبعة . وامتحان المربعات فى الطريق الهندى فلا يخلو إما أن يكون واحدا أو أربعة أو سبعة أو تسعة ، فللواحد واحد أو ثمانية ، وللأربعة اثنان أو سبعه ، وللسبعة أربعة أو خمسة ، وإن كان تسعة فثلاثة أو ستة أو تسعة .

ويتلو المربعات فى الأعداد الأعداد المخمسة ، وأولها الخمسة فإنها تؤلف على هذه الصورة ⁘ وهو أول المخمسات وضلعه اثنان ، والمخمس الثانى وهو الذى ضلعه العدد الثانى وهو ثلاثة، ويكون المخمس المجتمع منه اثنى عشر على هذه الصورة ⁙ . والعدد الثالث وهو أربعة والمخمس المجتمع منه هو الاثنان والعشرون، والرابع وهو خمسة والمخمس المجتمع منه خمسة وثلاثون ، والخامس أحد وخمسون ، والسادس سبعون . وترتيب أضلاعها على ترتيب الأعداد المتوالية، وإنشاؤها من جميع الأعداد المتفاضلة، ثلاثة ثلاثة، مبتدأ من الواحد مثل أعداد ١، ٤، ٧، ١٠، ١٣ ، ١٦ ، ١٩ .فالواحد مع الأربعة خمسة وهو أول مخمس ، والواحد مع الأربعة والسبعة اثنى عشر وهو المخمس الثانى ، والواحد مع الأربعة والسبعة والعشرة اثنان وعشرون وذلك هو المخمس الثالث . وقد تنشأ من جميع المربعات كل مع المثلث الذى دونه فى المرتبة مثل المربع الثانى مع المثلث الأول . فيكون اثنى عشر ، ولكل واحد منها خاصية مثل الخاصية الأخيرة المذكورة للمخمسات . لكن المسدس يدل على نصف ضلع ضلع والزيادة بتضعيف ضلع ضلع . وللمسبع بدل ذلك ضلع ونصف وعليه تجرى الزيادة ، وفى المثمن يدل ذلك ضلعان ضلعان . وقد تؤلف هذه كلها من المثلثات ، فكما أن المربع يتركب من مثلثين ، وكذلك المخمس من ثلاث ، والمسدس من أربع ، والمسبع من خمس ، على نسق يشابه نسق تأليف المربعات ، فيكون مثلا المخمس الثانى من مثلثين ، كل المثلث الأول مرتين ، والثالث المثلث الثانى ، والمخمس الثالث من الثانى مرتين والمثلث الثالث ، وكل مسدس مثلث ولا ينعكس . وكل مثلث عدده زوج فلا شركة بينه وبين المسدس ، وإذا أردت أن تجد المثلث من المسدس فتحذف الواحد من ضعف عد

---

(٩) اثنا عشر (د) ، ٢ وهو خطأ .

(٩) ⁙ : ⁘ فى سا والظاهر أن الصواب ⁙

(١٠) وهو خمسة ..... سبعون : ساقطة فى (د) وبدلها والخمس والخامس والسبعون .

(٢٣) مرتين الأولى ساقطة ـــ والمثلث الثالث ساقطة .

المسدس ، وعكسه أن يزاد واحد على عدد المثلث ويؤخذ نصفه ، وكل عدد مخمس فإنه ونصف مايجتمع من ضرب عدد أنقص من مرتبته واحد فى التفاضل بين الأعداد التى تنشأ منه ،وهو ثلاثة مزيدا عليه مابين عددين من ذلك وهو اثنان ، مضروبا فى عدد مرتبته من المخمسات العددية، مثاله إذا أردت أن تعلم المخمس الرابع ضربت ثلاثة وكان تسعة، وزدت عليه اثنين فكان أحد عشر ضربته فى أربعة وكان أربعة وأربعين أخذت نصفه فكان اثنين وعشرين هو المخمس الرابع ، وأيضا فإن كل مخمس فإنه مثل مضروب عدد مرتبته محسوبا من الواحد فى نفسه مزيدا عليه نصف ضلعه بمرار فى المخمسات العددية ، مثاله فى المسألة المذكورة بضرب أربعة فى أربعة لأنه فى المرتبة الرابعة من الواحد فيكون ستة عشر ، وتزيد عليه نصف ضلعه وهو اثنان ثلاث مرات فيكون اثنين وعشرين .

وبعد المخمسات المسدسات ، وتتألف من جميع الأعداد المتفاضلة بأربعة أربعة على قياس ماقيل فى المخمسات ، ثم المسبعات ويتألف من جمع الأعداد المتفاضلة بخمسة خمسة ، ثم المثمنات وتتألف من جميع الأعداد المتفاضلة بستة ستة . ونقول إن كل سطح بعد المربع إذا جمع مع المثلث حدث السطح الذى يلى ذلك السطح فى عدد الضلوع ، مثل المثلث الأول وهو ثلاثة إذا جمع مع المربع الثانى كان مخمسا ، وإن جمع مع المخمس الثانى وهو اثنى عشر كان مسدسا وهو الخمسة عشر ، وعلى هذا الترتيب : وفضل كل مسطح على الذى قبله مثلث ، وقد اتفق ولا ينعكس . وكل عدد تام فهو مسدس أو مثلث ، وسيكون من هذا سبيل يتوصل به إلى استخراج ترتيب الأعداد التامة أيضا ، فإذا قيل لك العدد التام الأول من أى المسدسات أو المثلثات هو ، فانظر إلى القانون الذى عرفته فى هذا الوجه خاصة فتجد أول زوج يعتبر فيه القانون المعلوم هو أربعة ، فيستخرج على ماعلمت وتنصف أربعة فيكون اثنين فقل هوالمسدس الثانى ، ويلى الأربعة ثمانية وتجد السبعة كذا أولا فيصلح لمطلوبك فينصف الثمانية فيكون أربعة فقل هو المسدس الرابع والمثلث السابع ، يلى الثمانية ستة عشر فإن نقصت منه واحدا بقى مركب فلا يصلح لعملك ويلى الستة عشر اثنين وثلاثين فإن نقصت منه واحدا بقى عدد أول فيصلح لعملك فخذ نصفه وهو ستة عشر فقل المسدس السادس عشر والمثلث الحادى والثلاثون وعلى هذا القياس .

---

(١٩) المثلثات : المخمسات (د) رهو دطأ .

ولنتكلم الآن فى الأعداد المجسمة فأولها المخروطات وتعرف بالنارية ، وهى التى تبتدئ من قاعدة متسعة ثم لايزال ينمو حتى يبلغ طرفا حادا تحده الوحدة ، فأولها التى قاعدته مثلثة وأول ذلك الأربعة فهى أول عدد ، وهو خطى وسطحى ومجسم ويتألف من تأليفات المثلثات على تواليها تركيبا للأنقص منها على الأزيد حتى ينتهى إلى الواحد ، ثم التى قاعدتها أربعة ويتولد من تأليف المربعات على تلك الصفة وكذلك التى قاعدتها مخمسة والتى قاعدتها مسدسة ، وكل عدد مسطح مركب منه يسمى قطعا ؛ والذى نقص من جانبه الأول سمى كرسيا وإنشاؤه ، وأما الذى قاعدته مثلث فان يضاف إلى الوحدة المثلث الأول ويكون أربعة فهو المخروط الأول ، ثم المثلث الثانى فيكون عشرة وهو المخروط الثانى من هذا القبيل . وأما الذى قاعدته مربع فأوله من الواحد والمربع الأول ، وثانيه من الواحد و المربع الثانى ، والذى قاعدته مخمس ومسدس وغير ذلك فعلى ذلك القياس .

وأما أمر الزوايا والأضلاع وعددها ، فعلى قياس الأشكال العظيمة والمنشور ، وأيضا من الأشكال العددية المجسمة وهى من تضعيف المثلثات وإلصاق بعضها ببعض ، فالستة أول منشور نشأ من المثلث الأول له ثلاثة أضلاع كل ضلع ذو أربعة ، وضلعان كل ضلع مثلث ، لكن الأضلاع فى أعدادها . وأما الأشكال المجسمة تحيط بها ستة سطوح فلا يخلو إما أن يكون طولها وعرضها وعمقها متساوية ، فيكون مثل عشرة فى عشرة ثم فى عشرة ويسمى مكعبا ، وإما أن يكون قطران منها متساويان وقطر مخالف وإذا كان القطر المخالف أصغر سمى لبنيا ، وإذا كان أكبر سمى عموديا ، وإن كان مسطحه الأصغر دائرا سمى مستديرا مثل خمسة فى خمسة ثم فى أكثر من خمسة . وإما إن كانت الثلاثة مختلفـــة فيسمى أجنبيا وزنبوريا ومخصرا ، لأنه يأخذ من غلظ إلى دقة ، وربما سموه الشكل المذبحى إذ كانت مذابحهم تبنى على تلك الصورة . مثال اللبنى أربعة فى أربعة ثم فى ثلاثة ، مثال العمودى أربعة فى أربعة ثم فى خمسة ، مثال الأجنبى ثلاثة فى أربعة ثم فى خمسة أو فى ثمانية ، ومن عادتهم أن يسموا العدد الذى يرجع

---

(٣) بعاليف : يتولد (د) .
(٤) تركيباً : ساقطة (سا) .
(٦) وكل عدد مسطح : كل عدد سدس (سا) .
(١٧) مثل عشرة فى عشرة : فى عشرة ساقطة فى (د) .

إذا ضرب فى نفسه ثم ما اجتمع فى نفسه وكذلك « عددا دائرا » مثل الخمسة والستة ، فإن الخمسة فى نفسها خمسة وعشرون ثم فى خمسة مائة وخمسة وعشرون ، والستة فى نفسها ستة وثلاثون ثم فى ستة مائتان وستة عشر ومن الناس من يسمى مسطحه دائرة ودوريا ، ومكعبة كرة وكريا ، والذى ينبغى أن يبحث عن حاله المكعب ، وقد علم منها جملة من كتاب الأصول .

ومن خواص المكعب أن كعب كل عدد إذا ضرب فى الذى يتلوه ثم فى الذى قبله ثم زيد الذى قبله على ما اجتمع كان مساويا له ، فأما إنشاؤه فإن ترتب الأفراد المتوالية مبتدئة من الواحد ثم تجمع على حسب المرتبة ، فيتولد المكعبات على توالیها ، مثاله لترتيب واحد ثلاثة خمسة سبعة فتسعة أحد عشر ثلاثة عشر ، فالواحد مكعب ، وبعده الثلاثة وهو فى المرتبة الثانية ، فيجب أن يجمع مرتين ، فيجمع الثانى والخمسة وذلك ثمانية ويكون مكعبها ، وبعده السبعة وهو فى المرتبة الرابعة ، فيجب أن يجمع ثلاث مرات فيكون سبعة تسعة أحد عشر فذلك سبعة وعشرون وهو المكعب الثانى . وعلى هذا النهج فإن أردت أن تعرف أول فرد تركب منه المكعب المعلوم ، فخذ عدد مرتبة المكعب فإن كان الثالث فالعدد ثلاثة فاضربه فى نفسه ، ثم خذ مرتبة المكعب فان كان الثالث فالعدد من أول عدد المكعب فيكون ذلك أنقص من الأول بواحد ، ويكون مثال هذين فى المكعب الثالث ، أما الأول فثلاثة وأما الثانى فاثنان فانقص الثانى من مربع الأول كما نقص هاهنا الاثنان من تسعة ، فهو أول فــرد منه تأليف المكعب الثالث وذلك هو سبعة ثم زدته عليها فيكون أحد عشرة وهو آخر فرد منه تركيبه فركب منهما ومما بينهما . والأربعة والخمسة والستة والتسعة تعود فى مكعباتها دائما آحادا فيكون ذلك دليلا على آحاد المكعب ، مثل أربعة فى أربعة ثم فى أربعة فيكون أربعة وستين ، والتسعة فى التسعة ثم فى التسعة ، وهو سبعمائة وتسعة وعشرون ، أما كعب الاثنين فهو فى الثمانية دائما ، وكعب الثانية فهو من الاثنين دائما ، وكعب السبعة فى الثلاثة وكعب الثلاثة فى السبعة دائما ، ومضروب الكعب فى الكعب ومقسومه عليه مكعب ، وضرب مربع عددين فى مربع عدد آخر نسبتهما نسبة كعبين لمكعب ، والتفاوت بين المكعبين المتوالين هو مضروب أقل الكعبين فى العدد الذى يتلوه ويزيد عليه بواحد ، ثم فى ثلاثة ثم تزيد عليه واحدا ، وكل مكعب

---

(٦) كعب : ساقطة فى (ب) .

(١٤ ، ١٥) فإن كان الثالث فالعدد : ساقطة فى (د) .

(٢١) ثم فى أربعة : ساقطة فى (سا) وبعدها فتكون أربعة : أربعة ساقطة فى (سا) .

سقط منه كعبه فيكون الباقى سدس صحيح ، وكل مكعب إلا واحد فبعده كعبه إلا واحد وكل واحد وكل مكعب فإن نصفه وضعفه غير مكعب ، وكل مكعب جمع إليه الواحد ومضروب المثلث الذى فى مرتبته فى ستة أبدا ، فهو الكعب الذى يليه ، فيمكن أن ينشأ من هذه المكعبات .

ومع خواص المكعبات أن امتحانها الذى على عمل الحساب الهندى يكون إما واحدا؟ وإما ثمانية وأما التسعة ، فان كان واحدا فآحاد المضلع واحد أو أربعة أو سبعة ، وإن كان ثمانية فثمانية أو اثنان أو خمسة ، وإن كان تسعة فثلاثة أو ستة أوسبعة وقد تقسم المضلعات من العدد ، فيقال إن منها ماهو هوهوى الطول ،ومنها ماهو غيرى الطول ، ومنها ما هو متباين الطول وهو الذى الخلاف بين طوله وعرضه بما هو فوق واحد . ومن عادة المتكلمين فى صناعة العدد أن يوردوا فى هذا الموضع وفيما يجرى مجراه كلاما خارجا عن الصناعة ومع ذلك خارجا عن عادة البرهانيين ،وأشبه شىء بقول الخطباء والشعراء ، فليهجر ذلك ، ولغط عليه مستهلة فى تسميتهم الطول بالغيرى الطول فيشبه أن يكون أول غيرية يقع بين العدد والعدد هو بواحد ، فيكون هو أصل المخالفة ومبتدأه كما أنه أصل العدد نفسه ، فيكون الأعداد الغيرية الطول هى المتفاوتة بواحد ، والسطوح الغيرية هى التى تحيط بها ضلعان غيريان ، وإذا رسم جدول فرتب فيه الأفراد على تواليها مبتدئة من الواحد فى سطر والأزواج على تواليها مبتدئة من الاثنين فى سطر يولد من جمع الأفراد على ما علمته الأعداد المربعة ، وتولد من جمع الأزواج الأعداد الغيرية الطول فيتولد من الفردية الهوهوية ومن الزوجية الغيرية على حسب الواحد ، ويبتدىء

١	٣	٥	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٧	١٩
٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨	٢٠

الفيثاغوريون من هذا الموضع فى بيان لا محصول له . فإن رتبت المربعات كرة ثانية فى سطر والغيريات الطول فى سطر ،ظهر من مجاورة السطرين أمور وخواص ، فمن ذلك أنك بجداول الغيريات على نسبة الضعف من أول المربعات وهو الزائد مثلا : والثانى عند الثانى على نسبة الزائد نصفا ، والثالث عند الثالث على نسبة

(٧) وإن كان تسعة : تسعة أو أربعة سا .

الزائد ثلثاً ، وكذلك كل على نسق الأعداد والمراتب فعلى أنه للرابع ربع وللخامس خمس ، وتجد التفاضل على نسبة الأعداد الطبيعية ففضل المرتبة الأولى واحد وفضل المرتبة الثانية اثنان، وكذلك . فإن حذف الواحد وقوبل بين ما هو عدد جاءت النسبة

١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦
٢	٦	١٢	٢٠	٣٠	٤٢

كذلك ، ولكن الزيادة من جانب كان منه النقصان ، فمكان الأربعة للإثنين على نسبة الضعف ، والتسعة للستة على نسبة الزائد نصفا ، والستة عشر للاثنى عشر على نسبة الزائد ثلثا ، وكذلك كان التفاوت على نسبة الأعداد الطبيعية مبتدئة من الاثنين . ثم إن رتبت أول الغيريات بعد المربع الأول مبتدئا من الواحد وثانيها بعد المربع الثانى أدت هذه النسبة بعينها مؤلفة فكان نسبة الاثنين إلى الواحد كنسبة الأربعة إلى الاثنين وهى نسبة الضعف مثناة ؛ وكانت نسبة الستة إلى الأربعة كنسبة التسعة إلى الستةوهى نسبة الزائد نصفا ، وقد بينت دائما ، ويكون الطرفان من كل نسبة إذا جمع مع ضعف الوسط مربعا ، ثم إن جمعت أعداد السطرين على نظامها . وابتدأت الأفراد من الواحد تولد منها الأعداد المثلثة على نظامها ، وتجد كل مضلع إذا نقص منه ضلعه تولد الغيرى الذى يجاوره من جانب النقصان ، وإذا زيدت عليه ضلعه تولد الغيرى الذى يجاوره من جانب الزيادة ، وإذا تحرك ضلع الكعب عنه نفى أضلاعه عنها ، وإذا أحدث مسطحا بين مربعين وحدث المربع الأول ، نأخذ منه نسبة ، والمربع الثانى نسبة أخرى ولكن يرجعان إلى النسب المتوالية مبتدئة من الضعف ، ثم المثل والنصف ، ثم المثل والثلث ، وكذلك قالوا ، فالفرد من تعطى عليه الهوهوية والملك تتولد منها المربعات والمكعبات ويوجد فى مراتب الأفراد مربع ، ولا يوجد فى مراتب الأزواج ألبتة :

تمت المقالة الثالثة من الأرثماطيقى بحمد الله وعونه .

---

(٢) الأعداد والمراتب فعلى : مثل (ب) ونجد : فكل (ب) .
الجدولان غير موجودين فى (د) ولكن فى ب يزيد ٢١ ٢٣ ٢٥ ٢٧
٢٢ ٢٤ ٢٦ ٢٨

(١٢) وقد علمت : وقد بينت (سا) .

المقالة الرابعة

المتواليات العشر

(المتواليات العشر)

وقد جرت العادة أن نذكر فى هذا الموضع المناسبات وأصنافها وخواصها، ومن الناس من يخترع للمناسبات شروحا كثيرة يبلغ بها عشرين وجها، ومنهم من اقتصر على عشرة، وهو المنقول من القديم ومن غرضى أن اقتصر على تلك العشرة وعلى الاقتصار فيها، فليس تميل نفسى إلى إيراد جميع ما أوردوه وذكر جميع ما قالوه ، فذلك مما لا محصول له ، وأنت فيجب أن تعلم أن هذه المناسبات المعتبرة أكثر محصولها فيما بينها تفاوت ، والأمور المتفاوتة التى يجرى تفاوتها على نمط واحد ، إما متصل مثل نسبة أ إلى ب ، ومثل ب إلى حـ ، أما أن يكون متشابها دائما ونمطها فى كمية نفسها أوكميتها عند غيرها ، وهذا هو الأصل والمعتبر ، وتشابه تفاوت الأعداد فى كمية نفسها هى مثل أن يكون زيادة هذا على ذلك مساويا لزيادة الثالث على الرابع ، مثل زيادة الستة على الأربعة والعشرة على الثمانية أو الأربعة على الاثنين ، وهذه هى المناسبة العددية. ويشابه تفاوت الأعداد فى كميتها عند غيرها كمثل أن تكون كمية زيادة هذا التفاوت عندما يعاونه واحد ، وهذا مثل حال الأربعة عند الاثنين فى المعاونة هو مثل حال العشرة عند الخمسة وهذه هى المناسبة الهندسية ، فهذان بالحقيقة أصلان ، لكن لما اعتبر حال تفاوت الكمية المضافة فى تفاوت الكمية العددية فى المناسبة العددية وحال تفاوت الكمية المضافة وجدا مختلفين ، فلا يوجد هناك اتفاق ألبتة ، مثلا لنضع نسبة هندسية مثل أربعة وستة وتسعة فإن الكمية المضافة متشابهة والكمية التى للعدد نفسه متشابهة فإن التفاوت فى بعد أحدهما اثنان وفى الآخر ثلاثة ، ولتوضع نسبة عددية مثل أربعة وستة وثمانية فيوجد تفاوت الكمية فى نفسها متساوين وتفاوت الكمية بالقياس غير متشابهة بل يكون ستة لأربعة زائدا بالنصف والثمانية للستة ليست زائدة بالنصف بل زائدة بالثلث ، وتوجد النسبتان دائما متواليتين لكن

---

(٣) شروحاً : (سا) – وجوها (ب) .

(٣ : ٤) اقتصر على عشرة وهو المنقول من القديم ومن غرضى أن أقتصر على : ساقطة (ب) .

(٥) فذلك مما لامحصول له : ساقطة (ب) ب .

أكبرهما بين العددين الأقلين وأصغرهما بين العددين الأكبرين ، فتنبه من هذه الأجزاء وهو أن نطلب أعـدادا تأليفها بجعل النسبتين اللتين بينهما متواليتين ويجعل الكبرى والصغرى بين الأصغرين ، فوجدت مناسبة أخرى على هذه الصفة ، مثل مناسبة ما بين الستة والأربعة والثلاثة ، وسميت تأليفية لأن الانتفاع بمراعاة واسطة هذه المناسبة إنما يقع فى صناعة التأليف وهو الموسيقى على ما سنعلمه فى موضعه ، وقد يجوز أن تكون قد سميت تأليفية لأن نسبة الطرفين مؤلفة من نسبة الفصلين على ما نعلم ، ولازمتها خاصة أن نسبة فضل الأعظم على الأوسط إلى فضل الأوسط على الأصغر هى نسبة الطرف الأعظم إلى الأصغر ، مثل نسبة الاثنين وهو فضل الستة على الأربعة إلى الواحد الذى هو فضل الاثنين على الثلاثة ، ثم إنهم فطنوا من هذه الخاصية التى لزمت هذه النسبة لاعتبار مناسبات فضول الحدود المتناسبة ، فتدرجوا منها إلى مناسبات ووسائط أخرى إنما تقع من جهة تتميم القسمة أو تكثيرها فلا جدوى لها أو لا كبير جدوى لها فى العلوم .

فلنبتدئ بمناسبة مناسبة وواسطة واسطة ، ونقول فيها كلاما موجزا ، أما الواسطة الهندسية فإنها تكون المجذور مضروب الطرفين ليكون جذر ما يجتمع من الطرفين أحدهما فى الآخر فأمر قد عرفته فى موضع آخر وعرفت أنه إذا كان بدل الواسطة واسطتان فمضروب أحدهما فى الآخر كمضروب الطرفين أحدهما فى الآخر ، فهذا يدلك على طلب الواسطة ، وعرفت فى هذا البحث أن هذه المناسبات الهندسية تتصل ثلاثة ثلاثة فى أدراج الغيريات المتتالية وفى المربعات المتتالية ، وقد علمت أيضا فى مواضع أخرى أن كل مربعين يمكن أن يقع بينهما واسطة هندسية واحدة فقط ، وكل مكعبين يمكن أن يقع بينهما واسطتان هندسيتان ، فلا نحتاج إلى أن نستأنف لك تعليم هذه الأحوال . وأما المناسبة والواسطة العددية فإنشاؤها من ترتيب الأعداد على تزايد واحد سواء كان بواحد أو بعشرة وهنالك تجدها متصلة بواسطة ومنفصلة بواسطتين وتعرف حال الواسطة عند الحاشية وسائر ذلك بما تقدم لك وعلمت الحال فى تتالى النسبة وموقع الصغرى والكبرى ، والذى نستفيده هاهنا طلب واسطتها ، وهو أن يوجد نصف مجموع الطرفين على ما علمت ، وخاصيتها هو أن الذى يكون من ضرب أحد الطرفين فى الآخر أقل من مربع الأوسط بمربع الفصل مثل أن مضروب الاثنين

---

(١) من هذه الأجزاء : من هذا الأمر لأمر آخر (سا) ، (ب) .

(٩) هو فضل الإثنين على الثلاثة : هو فضل الثلاثة على الإثنين (سا) ، (ب) .

(١٥) فأمر قد عرفته فى موضع آخر وعرفت : وقد عرفت فى موضع آخر (ب) .

فى الستة أقل من مضروب الواسطة فى نفسها وهو الأربعة بمضروب الفضل وهو الاثنان فى نفسه . وأما المناسبة والواسطة التأليفية وعرفت مضادتها للعددية فيما يضاده فيه ، واستخراج واسطته بأن يضرب الاختلاف بين الأعظم والأصغر فى الأصغر ونقسم على مجموعهما ونزيده على الأصغر فتخرج الواسطة مثل الاختلاف بين الستة والثلاثة ، وهو الثلاثة تضرب فى الثلاثة فيكون تسعة فيقسم على مجموع الستة والثلاثة فنخرج واحد فنزيده على الثلاثة فيكون أربعة ٦ ، ٤ ، ٣ ، وإذا كان عندك الأوسط والأكبر فأردت أن تجد الأصغر نظرت إلى فضل ما بينهما كم هو من الأوسط بأن تقسم عليه الأوسط مرة أخرى ، فما خرج تنقصه من أوسط فما بقى فهو الأصغر ، وإن كان الأصغر والأوسط معلومين عندك فأردت الأكبر ، قسمت الأوسط على الفضل فما خرج نقصت منه واحدا ثم قسمت عليه فما خرج زدته على الأوسط . ومن خواص هذه المناسبة أن مضروب مجموع الطرفين فى الأوسط . مثل ضعف إحدى الحاشيتين فى الأخرى ، وأيضا فإن مضروب واسطته فى الأكبر مثل ضعف واسطته فى الأصغر وضعف مضروب أحد الطرفين فى الأخر .

وقد ظن قوم أن هذه النسبة أنما سميت تأليفية ، لأن فضولها ليست فى الحدود وحدها ولا فى التفاضل وحده بل بعض فى ذا وبعض فى ذلك ، فكأنه وقع فى ذلك تأليف وهذا متكلف ، وقد قالوا ما هو أشد تكلفا من هذا . فأما المناسبات التى بعد هذه فمنها ثلاثة عرفت أولا ، ومنها أربعة عرفت ثانيا ، ومنهما مناسبات ليس من عزمنا أن تلتفت إليها . وهذه الأربع تعرف بالثالثة والخامسة والسادسة ، وتسمى الرابعة المضادة لأنها تضاد التأليفية ، فإنها جعلت بحيث يكون نسبة فضل الأوسط على الأصغر إلى فضل الأعظم على الأوسط ، كنسبة الأعظم إلى الأصغر مثل ٣ ، ٥ ، ستة ، واستخراجها بضرب الفضل بين الطرفين فى الأصغر والقسمة على مجموعهما واسقاط ما خرج من الأعظم فهو الأوسط . وخاصيتها أن مضروب الأعظم فى الأوسط ضعف مضروب الأصغر فى الأوسط ، والمناسبة والواسطة الخامسة أن يكون الأوسط عند الأصغر مثل فضل تفاضل الأصغرين عند تفاضل الأعظمين وأعداده ٢ ٤ ٥ ، وكأنها تضاد بذلك

---

(١) وهو الأربعة : ساقطة فى (د) .

(١٢) مضروب واسطته فى الأكبر مثل ضعف واسطة فى الأصغر وضعف مضروب أحد الطرفين فى الآخر فى الجزء الأول فى المثال فقط ، والجزء الثانى خاص بسطرين قبل ذلك (المحقق) .

(١٣) الأصغر : الأكبر (سا) .

(٢٢) الأعظم × الأوسط = ضعف مضروب الأصغر فى الأوسط : هذا فى المثال فقط (المحقق) .

الهندسية ، وطلب هذه الواسطة أن تزيد الأصغر على الأكبر ، وتقسم ما اجتمع قسمة يكون ضرب أحدهما فى الأخر كضرب الباقى من الأعظم بعد طرح الأصغر منه فى الأصغر ، وذلك سهل لمن عرف النسبة فإن أمكن ذلك ، وإلا فالمسألة مستحيلة ، فما خرج ينقص الأصغر من أكبره وما بقى فهو الواسطة . ومن خاصيتها أن ضرب الأعظم فى الأوسط ضعف ضرب الأعظم فى الأصغر مزيدا عليه الأوسط ، ومن تلك أن واسطتها فى المناسبة الضعفية مجذور دائما جذره الأصغر ، وأن الطرف الأعظم أصغر من مجموع الباقيين بواحد ، والسادسة أن يكون الأعظم عند الأوسط مثل فضل الأصغرين عند فضل الأعظمين ، وهى أيضا تضاد بذلك الهندسية ، ومثاله ١ ٤ ٦ ، واستخراج الواسطة بأن تنقص الأصغر من الأعظم ويزاد عليه فينظر مبلغ الباقى فيضرب فى الأعظم ، ثم ينظر كم يحتاج أن يزاد على الأعظم حتى يكون ضرب تلك الزيادة فى جميع المجموع من الأصل والزيادة بين مثل المسطح الذى حفظ لمجموع الزيادتين هو الواسطة ، فان أمكن فالمسألة محال ، وأيضا فانك إذا نقصت وضربت أخذت مربع نصف مجموع الحاشيتين وزدته على المحفوظ وأخذت جذره ونقصت منه المضروب أولا فى نفسه فما بقى تزيده على الأصغر . وقد وجد بها من الخواص أن المناسبة إذا كانت على نسبة المثل والجزء كان الواسطة مجذورا ، أو إذا أضيف إليها جذرها كان مجموعه الطرف الأعظم والطرف الأصغر أقل منه بجذره ، وأما الأربعة التى عرفت أخيرا فأولها وهى السابعة أن تكون نسبة التفاضل بين الطرفين إلى التفاضل بين الأصغرين كنسبة الأعظم عند الأصغر ، مثاله ٦ ٨ ٩ ، واستخراج واسطتها بضرب الأصغر فى الفضل بينه وبين الأعظم وقسمة المجموع على الأعظم وزيادة ما خرج على الأصغر ، فما بلغ فهو الواسطة ، والثامنة أن تكون نسبة الأعظم إلى الأصغر كنسبة تفاضل الطرفين إلى تفاضل الأعظمين ، مثاله ستة سبعة تسعة وهى عكس السابعة ، واستخراج واسطتها عكس استخراج تلك الواسطة ، وذلك بضربك الأصغر فى الفضل بين الطرفين وبقسمة الخارج على الأعظم فما خرج تنقصه من الأعظم ، فما بقى فهو الواسطة ، والتاسعة أن يكون نسبة تفاضل الطرفين إلى تفاضل الأصغرين نسبة الواسطة إلى الأصغر مثل ٤ ٦ ٧ ، واستخراج واسطتها بأن ينقص الأصغر من الأكبر ويقسم الباقى قسمة تكون نسبة أحد القسمين إلى الآخر كنسبة الآخر إلى الأصغر ان أمكن ، فتسقط القسم الأول منهما من الأعظم ، فما بقى

---

(٦) الضعيفة : الضعيفة .

(٩) تنقص : تخرج (سا) — ١ ٤ ٦ : ١ ٤ ٥ ٦ (ب) :

(١٨) ٦ ٨ ٩ : ٤ ٦ ٧ أو ٣ ٨ ٩ (سا)

فهو الأوسط ، ولك أن تجمع مضروب الفضل فى الأصغر إلى مربع نصف الأصغر وتأخذ جذره فزيد على نصف الأصغر ، وهذه المناسبة على نسبة المثل والجزء كان الأصغر مربعا ابدا . والمناسبة والواسطة العاشرة أن تكون نسبة تفاضل الطرفين إلى تفاضل الأعظمين مثل نسبة الواسطة عند الأصغر ومثاله ٥ ٣ ٢ ، واستخراج واسطته أن تأخذ فضل ما بين الطرفين مضروبا فى الصغرى منقوصا من مربع نصف الكبرى فتأخذ جذر ذلك وزدته على نصف الصغرى فهذه هى الوسايط العشرة . والعددية منها لا تجتمع فى طرفين مع الهندسية أبدا ، ولا مع السابعة والثامنة ، ولا مع التأليفية إلا أن يكون الأعظم ضعف الأصغر مثل الستة والثلاثة فتوجد بينهما الواسطتان معا ، ولا مع الرابعة إلا أن يكون الأعظم أيضا ضعف الأصغر ، والهندسية لا توجد مع التأليفية ولا مع الرابعة ولا مع السابعة ولا مع الثامنة ولا مع التاسعة ، إذا فرض لنا الثمانون والعشرون حدين كان الخمسون بينهما واسطة عددية ، والأربعون واسطة هندسية ، واثنان وثلاثون واسطة تأليفية ، والثمانية والستون واسطة رابعة ، والخمسه والثلاثون واسطة سابعة ، والخمسة والستون واسطة ثامنة ، وقد خرجت الخامسة والسادسة والتاسعة والعاشرة ، فلنضع أول حدود المناسبة الخامسة وهى ٢ ٤ ٥ ، فاذا نقص من الأصغر واحد وزيد على الأعظم صار ١ ٤ ٦ وهى المناسبة السادسة ، وإذا زيد على كل حد اثنان حتى صار ٤ ٦ ٧ خرجت المناسبة التاسعة ، وإذا نقص من المناسبة الخامسة واحد حتى صار ٢ ٣ ٥ خرجت المناسبة العاشرة .

فهذا ما نقوله فى علم الارثماطيقى ، وقد تركنا أحوالا اعتبرنا ذكرها فى هذا الموضع خارجة عن قانون الصناعة ، وقد بقى من علم الحساب ما يغنى فى الاستعمال والاستخراج ، وهو هو فى العمل مثل الجبر والمقابلة والجمع والتفريق الهندى وما يجرى مجراها ، والأولى فى أمثال ذلك أن تذكر فى الفروع فلنقتصرها هنا على المبلغ المذكور ولنعده إلى علم الموسيقى .

تمت المقالة الرابعة من الأرثماطيقى وتم الكتاب بحمد الله وحسن توفيقه .

---

(٥) نصف الصغرى : صوابه نصف الكبرى (المحقق) .

(١١) واثنان وثلاثون . ثلاثون ساقطة فى (سا) ، (د) .

(١٦) المناسبة الخامسة : الخامسة ساقطة فى (سا) ، (د) .